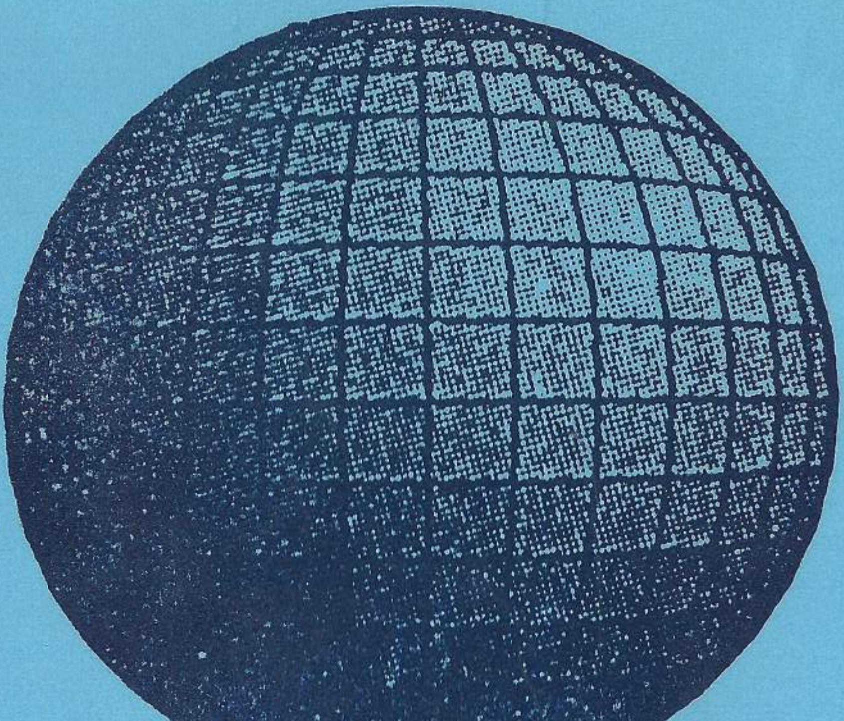
RESOLUCION TOTAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

VOLUMEN I



FRANCISCO MONTES DE OCA PUZIO

FRANCISCO MONTES DE OCA PUZIO

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS - (1971 – 1975)
PROFESOR DE UPIICSA - (1976 – 1993)
PROFESOR DE ESIA - (1993 – 2007)
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

RESOLUCIÓN TOTAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES
VOLUMEN I

EDITORIAL SKORPIO

ISBN 970 - 9901 - 06 - 0

DECIMOQUINTA EDICIÓN
ENERO 2008

IMPRESO EN MÉXICO – PRINTED IN MEXICO.

A MI MADRE
JOSEFA
ESENCIA EXCELSA
DE
AMOR
Y
SABIDURÍA

MI FILOSOFÍA

El ser humano es presencia ante toda esencia
que presente existencia.

El ensimismarse es contemplar la luz y la sombra
de nuestro espíritu.

La sabiduría consiste en no ser judas de
los pensamientos propios.

Ayudar a los seres que van a la deriva es
cuestión fundamental en la vida.

Las esencias que emanan de la filosofía, la poesía y
la literatura, son ineludibles para el Universo
de la Ciencia.

De la oscuridad y con mis propias palabras,
reflejadas en esta humilde obra, he
venido en busca de la claridad.

EX CORDE.

PRÓLOGO.

Una gama extensa de problemas esenciales en matemáticas, física, ingeniería de todo tipo, química, economía, biología, etc., se describen mediante el uso de las **ecuaciones diferenciales**. Es factibale que muchos problemas de tecnologías que se presenten en el futuro, también se describirán por medio de las ecuaciones diferenciales.

Los **problemas físicos** conducen a la elaboración de **modelos matemáticos**. Esto ha motivado intensamente el desarrollo de la mayor parte de las matemáticas y de manera especial cuando se trata de las ecuaciones diferenciales. Por esta razón, cuando se estudia esta materia es importante no limitarse exclusivamente a la parte formal de las matemáticas, es decir, hay que analizar paralelamente la relación existente entre los problemas de matemáticas y de física.

Para obtener buenos conocimientos de esta área trascendental, el estudiante debe conocer ampliamente las teorías desarrolladas del **cálculo diferencial e integral.**

El análisis ha sido la prioridad dominante de las matemáticas durante los tres últimos siglos, y las **ecuaciones diferenciales** ocupan un lugar preponderante. Constituyen el objetivo natural del cálculo elemental y la porción matemática más importante para la comprensión de las ciencias físicas. Es la base de la mayoría de los conceptos y teorías que conforman el análisis superior en áreas tales como: **series de potencias, series de Fourier, función gamma y otras funciones especiales, ecuaciones integrales, teoremas de existencia, necesidad de justificación rigurosa de muchos problemas analíticos, etc.**

FCO. MONTES DE OCA PUZIO.

ÍNDICE.

ECUACIONES DIFERENCIALES.

DEFINICIÓN. Una ecuación diferencial es la ecuación que contiene derivadas o diferenciales.
CLASIFICACIÓN. Se clasifican de acuerdo con su **tipo, orden, grado** y **linealidad.**
TIPOS.
(A) Ecuación diferencial ordinaria.
(B) Ecuación diferencial parcial.
ORDEN.
Es el índice de la derivada superior que se presente en la ecuación.
GRADO.
Es el exponente que acompaña a la derivada de mayor orden.
LINEALIDAD.
Es lineal si tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

PROPIEDADES.
(A) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado.
(B) Cada coeficiente depende sólo de la variable independiente **x** o pueden ser constantes.

Son **no lineales** las que no cumplen las propiedades anteriores.

A continuación veremos algunos ejemplos que satisfacen la definición de ecuación diferencial y, en una misma tabla, sus clasificaciones respectivas.

(1) $\frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$

(2) $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$

(3) $x^2 y'' + xy' + y = 0$

(4) $y\, y'' + x^2 y = x$

(5) $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C$

(6) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$

(7) $\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = kv (\frac{\partial^2 m}{\partial n^2})^2$

(8) $(y^v)^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$

(9) $y' + y = \frac{x}{y}$

(10) $sen\, y' + y = 0$

(11) $y'' + x y y' = senx$

(12) $c^2 \frac{\partial^5 x}{\partial t^5} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = C$

(13) $x^3 y y''' - x^2 y y'' + y = 0$

(14) $y'' + 2x^3 y' - (x-1) y = xy^{\frac{3}{2}}$

(15) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y}$

(16) $xdy + ydx = 0$

(17) $y''-2y'+y=0$

(18) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=e^x$

(19) $yy''-2y'=x+1$

(20) $\frac{d^3y}{dx^3}+y^2=0$

EJEMPLO	TIPO	ORDEN	GRADO	LINEAL
1	ORDINARIA	1	1	SI
2	PARCIAL	1	1	SI
3	ORDINARIA	2	1	SI
4	ORDINARIA	2	1	NO
5	PARCIAL	2	1	SI
6	ORDINARIA	2	1	SI
7	PARCIAL	4	1	NO
8	ORDINARIA	5	3	NO
9	ORDINARIA	1	1	NO
10	ORDINARIA	1	?	NO
11	ORDINARIA	2	1	NO
12	PARCIAL	5	1	SI
13	ORDINARIA	3	1	SI
14	ORDINARIA	2	1	NO
15	PARCIAL	2	1	NO
16	ORDINARIA	1	1	SI
17	ORDINARIA	2	1	SI
18	ORDINARIA	3	1	SI
19	ORDINARIA	2	1	NO
20	ORDINARIA	3	1	NO

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

SOLUCIÓN. Es una función que no contiene derivadas o diferenciales y que satisface a la ecuación diferencial.

SOLUCIÓN GENERAL. Es una función que contiene una o más constantes de integración independientes y arbitrarias. Geométricamente, **la** solución general representa una **familia de curvas**.

SOLUCIÓN PARTICULAR. Es una solución que puede obtenerse de la solución general y será una función cuyas constantes arbitrarias toman un valor específico.

EJEMPLO. La función $y = 3x^2 + C_1x + C_2$ es una **solución general de la ecuación diferencial** $y'' = 6$ puesto que $y' = 6x + C_1$ y $y'' = 6$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO.

La forma general es

$$\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

donde **M** y **N** son funciones que dependen de **x** y **y**.

Analizaremos cuatro métodos que se emplean con mucha frecuencia.

VARIABLES SEPARABLES.

Si una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, puede escribirse en la forma

$$\mathbf{M(x)dx + N(y)dy = 0}$$

en la cual M es función únicamente de x y N es función únicamente de y, entonces se dice que las **variables son separables**. La **solución general** de la ecuación diferencial se obtiene mediante los métodos usuales de la integración

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

donde C es una constante arbitraria.

EJEMPLOS.

(1) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Demostración.

Despejando

$$ydy = xdx$$

Con esto hemos separado las variables. Ahora integramos

$$\int y\,dy = \int x\,dx + C_1$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 = x^2 + C.$$

la cual es la **solución general**.

VARIABLES SEPARABLES.

(2) Resolver la ecuación

$$3x^2 - 2y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

Demostración.
Al multiplicar por dx quedan separadas las variables

$$3x^2dx - 2y^3dy = 0$$

$$\int 3x^2dx - \int 2y^3dy = C_1$$

$$\frac{3x^3}{3} - \frac{2y^4}{4} = C_1$$

$$x^3 - \frac{y^4}{2} = C_1$$

$$2x^3 - y^4 = C$$

(3) Resolver la ecuación

$$xdy - (y+1)dx = 0$$

Demostración.
Dividimos entre x

$$dy - \frac{y+1}{x}dx = 0$$

ahora entre $y+1$

$$\frac{dy}{y+1} - \frac{dx}{x} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dx}{x} = C$$

$$\ln(y+1) - \ln x = \ln C$$

$$\ln(y+1) = \ln C + \ln x$$

Por ley de logaritmos

$$\ln(y+1) = \ln Cx$$

$$y+1 = Cx$$

(4) Resolver la ecuación

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

Demostración.

$$(1+x^2)\,dy + xy\,dx = 0$$

Dividimos cada término entre $1+x^2$

$$dy + \frac{xy\,dx}{1+x^2} = 0$$

ahora entre y

$$\frac{dy}{y} + \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = C$$

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln C$$

$$\ln y + \ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \ln C$$

$$\ln y\sqrt{1+x^2} = \ln C$$

$$y\sqrt{1+x^2} = C$$

(5) Resolver la ecuación

$$x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$$

Demostración.
Dividimos cada término entre $y+1$

$$x^2dx + \frac{y^2(x-1)}{y+1}dy = 0$$

ahora entre x-1

$$\frac{x^2}{x-1}dx + \frac{y^2}{y+1}dy = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{x^2}{x-1}dx + \int \frac{y^2}{y+1}dy = C$$

Para resolver las integrales, primero hay que dividir en cada caso

$$\int (x+1+\frac{1}{x-1})\,dx + \int (y-1+\frac{1}{y+1})\,dy = C_2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x-1) + \frac{1}{2}y^2 - y + \ln(y+1) = C_2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2\ln(x-1)(y+1) = C_1$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + 2\ln(x-1)(y+1) = C$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + 2\ln(x-1)(y+1) = C$$

(6) Resolver la ecuación

$$e^{y^2}\,dx + x^2 y\,dy = 0$$

Demostración.

Dividimos cada término entre e^{y^2}

$$dx + \frac{x^2 y}{e^{y^2}}\,dy = 0$$

ahora entre x^2

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{y}{e^{y^2}}\,dy = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int x^{-2}\,dx + \int y e^{-y^2}\,dy = C$$

$$\int x^{-2}\,dx - \frac{1}{2}\int e^{-y^2}(-2y\,dy) = C_1$$

$$-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}e^{-y^2} = C_1$$

$$\frac{2}{x} + e^{-y^2} = C$$

$$2 + xe^{-y^2} = Cx$$

(7) Resolver la ecuación

$$\cos x \cos y\; dx + senx\, seny\; dy = 0$$

Demostración.
Dividimos cada término entre $\cos y$

$$\cos x\; dx + \frac{senx\; seny}{\cos y}\, dy = 0$$

ahora entre $senx$

$$\frac{\cos x}{senx}\, dx + \frac{seny}{\cos y}\, dy = 0$$

Por trigonometría

$$\cot x\; dx + \tan y\; dy = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \cot x\; dx + \int \tan y\; dy = C$$

$$\ln(senx) - \ln(\cos y) = \ln C$$

$$\ln(senx) = \ln C + \ln(\cos y)$$

$$\ln senx = \ln C(\cos y)$$
$$senx = C\cos y$$

(8) Resolver la ecuación

$$\frac{dV}{dP} = -\frac{V}{P}$$

Demostración.

$$P\,dV = -V\,dP$$
$$P\,dV + V\,dP = 0$$
$$dV + \frac{V}{P}dP = 0$$
$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dV}{V} + \int\frac{dP}{P} = C$$
$$\ln V + \ln P = \ln C$$
$$\ln(VP) = \ln C$$
$$VP = C$$

(9) Resolver la ecuación

$$x^2 y\, y' = e^y$$

VARIABLES SEPARABLES.

Demostración.

$$x^2 y\frac{dy}{dx} - e^y = 0$$

$$x^2 y\,dy - e^y\,dx = 0$$

$$y\,dy - \frac{e^y}{x^2}dx = 0$$

$$ye^{-y}\,dy - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$ye^{-y}\,dy - x^{-2}\,dx = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int ye^{-y}\,dy - \int x^{-2}\,dx = C$$

La primera integral la resolvemos por el método de integración por partes

$$u = y \qquad dv = e^{-y}\,dy$$

$$du = dy \qquad v = -e^{-y}$$

en consecuencia

$$-ye^{-y} + \int e^y\,dy + \frac{1}{x} = C$$

$$-ye^{-y} - e^y + \frac{1}{x} = C$$

$$xe^{-y}(-y-1) + 1 = C$$

$$x(y+1) = (Cx+1)e^y$$

VARIABLES SEPARABLES.

(10) Resolver la ecuación

$$(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$$

Demostración.

$$dx+\frac{1+x^2}{1+y^2}dy=0$$

$$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=C$$

$$\arctan x+\arctan y=C$$

(11) Resolver la ecuación

$$\tan^2 y\,dy=sen^3x\,dx$$

Demostración.

Las variables están separadas. Integramos

$$\int\tan^2 y\,dy=\int sen^3x\,dx+C_1$$

$$\int(\sec^2 y-1)dy=\int sen^2x\,senx\,dx+C_1$$

$$\int\sec^2 y\,dy-\int dy=\int(1-\cos^2 x)senx\,dx+C_1$$

$$\tan y-y=\int senx\,dx-\int\cos^2 x\;senx\,dx+C_1$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C_1$$

$$3\tan y - 3y = \cos^3 x - 3\cos x + C$$

(12) Resolver la ecuación

$$(1+x^3)dy - x^2 y\,dx = 0$$

y determinar la solución particular en (1 , 2).
Demostración.

$$dy - \frac{x^2 y}{1+x^3}\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = C_1$$

$$\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx = C_1$$

$$\ln y - \frac{1}{3}\ln(1+x^3) = C_1$$

$$3\ln y = \ln(1+x^3) + \ln C$$

$$\ln y^3 = \ln C(1+x^3)$$

$$y^3 = C(1 + x^3)$$

Si $y = 2$ cuando $x = 1$, se tiene que

$$8 = C(1+1)$$
$$8 = 2C$$
$$C = 4$$

en consecuencia

$$y^3 = 4(1 + x^3)$$

(13) Resolver la ecuación

$$2xyy' = 1 + y^2$$

y determinar la solución particular en (2 , 3).

Demostración.

$$2xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$
$$2xy\,dy = (1 + y^2)dx$$
$$y\,dy = \frac{1+y^2}{2x}dx$$
$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2x}dx$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + C_1$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln x + C_1$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln x + C_1$$

$$\ln(1+y^2) = \ln x + \ln C$$

$$\ln(1+y^2) = \ln Cx$$

$$1+y^2 = Cx$$

$$y^2 = -1 + Cx$$

Si $y=3$ cuando $x=2$, se tiene que

$$9 = -1 + 2C \qquad \therefore \qquad 2C = 10 \qquad \therefore \qquad C = 5$$

en consecuencia

$$y^2 = 5x - 1$$

(14) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x e^{y-x^2}$$

y determinar la solución particular en (0 , 0).

Demostración.

$$dy = xe^{y}e^{-x^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = xe^{-x^2}\,dx$$

$$e^{-y}\,dy = xe^{-x^2}\,dx$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int e^{-y}\,dy = \int xe^{-x^2}\,dx + C_1$$

$$\int e^{-y}\,dy = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x\,dx) + C_1$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1$$

$$2e^{-y} = e^{-x^2} + C$$

Si $y = 0$ cuando $x = 0$, se tiene que

$$2 = 1 + C \qquad \therefore \qquad C = 1$$

en consecuencia

$$2e^{-y} = e^{-x^2} + 1$$

(15) Resolver la ecuación

$$\cos y\,dx + (1 + e^{-x})\,seny\,dy = 0$$

y determinar solución particular en $(0\ ,\ \pi/4)$.

VARIABLES SEPARABLES.

Demostración.

$$\frac{dx}{1+e^{-x}}+\frac{seny}{\cos y}dy=0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{1+e^{-x}}+\int\frac{sen\,y}{\cos y}\,dy=C$$

$$\int\frac{e^{x}\,dx}{e^{x}(1+e^{-x})}+\int\tan y\,dy=C$$

$$\int\frac{e^{x}\,dx}{e^{x}+1}-\ln(\cos y)=C$$

$$\ln(e^{x}+1)=\ln C+\ln(\cos y)$$

$$\ln(e^{x}+1)=\ln C(\cos y)$$

$$e^{x}+1=C(1/\sec y)$$

$$\sec y(e^{x}+1)=C$$

Si $y=\pi/4$ cuando $x=0$, se tiene que

$$\sec\frac{\pi}{4}(e^{0}+1)=C \qquad \therefore \qquad C=2\sqrt{2}$$

en consecuencia

$$\sec y(e^{x}+1)=2\sqrt{2}$$

es la solución particular.

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS.

Para establecer si una función es homogénea o no, hay que recordar el significado de grado de una ecuación. En geometría analítica cuando se menciona una ecuación lineal, sabemos que es aquella ecuación de grado uno. Este grado se obtiene de la variable

$$f(x) = ax + b$$

Si estudiamos la ecuación general dada por

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sabemos que es de segundo grado, puesto que así nos lo indica el exponente mayor de la derivada involucrada.

Posteriormente se verá que una ecuación diferencial lineal es de primer grado, siempre y cuando lo sea en una variable y en su derivada.

Ahora el problema por analizar es cuando tenemos un producto de dos variables o más, con exponentes iguales o diferentes. De aquí la pregunta: ¿Qué grado tiene una ecuación de está forma? El grado de un producto se obtiene sumando los exponentes que intervienen en las variables de dicho producto.

EJEMPLO. Sea el producto: $x^2 y$

(a) Es una expresión de segundo grado en x.

(b) Es una expresión de primer grado en y.

(c) Es una expresión de tercer grado en x e y.

EJEMPLO. Sea el polinomio

$$x^2 - 4xy + 8y^2$$

es una expresión matemática de segundo grado.

EJEMPLO. Sea el polinomio

$$x^4 y + 7y^5$$

es una expresión matemática de quinto grado.

Existe un criterio matemático de gran utilidad que nos permite de una manera sencilla, determinar el grado de una ecuación. Dicho criterio es muy importante puesto que no siempre es fácil calcular el grado de una ecuación a simple vista. Por otra parte, **si la ecuación tiene el mismo grado en cada uno de sus términos, se dice que es homogénea.**

CRITERIO. Se dice que f(x,y) es una función homogénea de grado n en x e y si se verifica la igualdad

$$f(tx\,,\,ty) = t^n f(x,y) \qquad \text{(I)}$$

para todos los valores de t, x, y.

El método consiste

(a) Dada una expresión que involucre a las variables x e y, reemplazarlas por **x = tx** y **y = ty**.

(b) Factorizar a t. El exponente que aparezca en t, nos indicará el grado.

EJEMPLOS.

Demostrar que las expresiones siguientes son homogéneas y determinar el grado.

(1) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$

$f(tx,ty) = (tx)^2 - 3(tx)(ty) + 4(ty)^2$

$$= t^2x^2 - 3t^2xy + 4t^2y^2$$
$$= t^2(x^2 - 3xy + 4y^2)$$
$$= t^2 f(x, y)$$

Cada uno de los términos tiene el mismo grado, lo cual implica que es homogénea. El grado de este polinomio es 2.

(2)

$$f(x,y) = x^4y + 7y^5$$
$$f(tx,ty) = (tx)^4(ty) + 7(ty)^5 = t^4x^4ty + 7t^5y^5 =$$
$$= t^5x^4y + 7t^5y^5 = t^5(x^4y + 7y^5) =$$
$$= t^5 f(x,y)$$

Homogénea y de grado 5.

(3)

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + x \operatorname{sen}\frac{x}{y}$$
$$f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + (tx)\operatorname{sen}\frac{tx}{ty}$$
$$= t\sqrt{x^2 - y^2} + tx \operatorname{sen}\frac{x}{y} = t(\sqrt{x^2 - y^2} + x \operatorname{sen}\frac{x}{y})$$
$$= t\, f(x,y)$$

Homogénea y de grado 1.

TEOREMA. La ecuación diferencial

$$\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad \textbf{(II)}$$

es **homogénea** en x e y, si M y N son funciones homogéneas del mismo grado en sus variables x e y. Para resolver este tipo de ecuaciones se requiere hacer un cambio de variable **y = vx** o bien **x = vy** con su respectiva diferencial. Esto nos conducirá a una ecuación diferencial de variables separables.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la ecuación diferencial (II) con M y N siendo funciones homogéneas de grado n. Entonces de (I) se sigue que:

$$M(x,y) = \frac{M(tx,ty)}{t^n} \quad , \quad N(x,y) = \frac{N(tx,ty)}{t^n}$$

De (II) se obtiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

en consecuencia

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(tx,ty)}{t^n}\,\frac{t^n}{N(tx,ty)} = -\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)}$$

para toda t. Para el caso especial de t = 1/x, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(1\,,y/x)}{N(1\,,y/x)}$$

Esta última ecuación la podemos escribir de la siguiente manera

$$\frac{dy}{dx} = -F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \textbf{(III)}$$

Si hacemos y = vx por lo tanto v = y/x y además

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

en consecuencia (III) queda como

$$v + x\frac{dv}{dx} = -F(v)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} + F(v) = 0$$

$$v\,dx + x\,dv + F(v)\,dx = 0$$

$$[v + F(v)]dx + x\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v + F(v)} = 0$$

Ahora tenemos las variables separadas, en consecuencia podemos aplicar el **método de variables separables**. Después de aplicarlo y obtener la solución, hay que cambiar a v por su valor expresado en términos de x e y. Esto es fácil puesto que ya sabemos que v = y/x.

Un proceso similar se sigue para el caso de x = vy.

EJEMPLOS.

En los siguientes ejemplos, M y N siempre serán homogéneos.

(1) Resolver la ecuación

$$(x^3 - y^3)\,dx + xy^2 dy = 0$$

Demostración.

Sustiyuyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$(x^3 - v^3x^3)dx + x(v^2x^2)(vdx + xdv) = 0$$

$$x^3dx - x^3v^3dx + x^3v^3dx + x^4v^2dv = 0$$

simplificamos y dividimos cada término por x^4

$$\frac{dx}{x} + v^2dv = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{dx}{x} + \int v^2dv = C_1$$

$$\ln x + \frac{v^3}{3} = C_1$$

$$3\ln x + v^3 = C$$

$$\ln x^3 + v^3 = C$$

Pero $v = \dfrac{y}{x}$, por lo tanto

$$\ln x^3 + \frac{y^3}{x^3} = C$$

$$y^3 = Cx^3 - x^3 \ln x^3$$

es la solución general.

(2) Resolver la ecuación

$$(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$$

Demostración.

Sustiyuyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$(v^2x^2 - x^2v)dx + x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$x^2v^2dx - x^2vdx + x^2vdx + x^3dv = 0$$

$$x^2v^2dx + x^3dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v^2} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{x} + \int v^{-2}\,dv = C$$

$$\ln x - \frac{1}{v} = C$$

Pero $y = \frac{v}{x}$

$$\ln x - \frac{x}{y} = C$$

(3) Resolver la ecuación

$$(x - y)\,dy = (y - x)\,dx$$

Demostración.

Sustituyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$(x - vx)(vdx + xdv) = (vx - x)\,dx$$

$$xvdx + x^2dv - xv^2dx - x^2vdv = xvdx - xdx$$

Simplificamos y dividimos cada término entre x

$$dx - v^2 dx + x\,dv - xv\,dv = 0$$

$$(1 - v^2)dx + (1 - v)\,x dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{1 - v^2} dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - v}{(1 - v)(1 + v)} dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{1 + v} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{1 + v} = C$$

$$\ln x + \ln(1 + v) = \ln C$$

$$\ln x(1 + v) = \ln C$$

$$x(1 + v) = C$$

Pero $v = \dfrac{y}{x}$

$$x(1 + \frac{y}{x}) = C$$

$$x(\frac{x + y}{x}) = C$$

$$x + y = C$$

es la solución general.

(4) Resolver la ecuación

$$(x^2 - xy)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

Demostración.

$$(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$$

Sustituyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$(x^2 - vx^2)(vdx + xdv) + v^2x^2dx = 0$$

$$x^2vdx + x^3dv - x^2v^2dx - x^3vdv + x^2v^2dx = 0$$

$$x^2vdx + x^3dv - x^3vdv = 0$$

$$x^2vdx + (1-v)x^3dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-v}{v}dv = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{1-v}{v}dv = C$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{v} - \int dv = C$$

$$\ln x + \ln v - v = C$$

Pero $v = y/x$

$$\ln x + \ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = C \quad \therefore \quad \ln x + \ln y - \ln x - y/x = C$$

$$x\ln y - y = Cx$$

HOMOGÉNEAS.

(5) Resolver la ecuación

$$xdy - ydx - \sqrt{x^2 - y^2}\, dx = 0$$

Demostración.
Sustituyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$x(vdx + xdv) - vxdx - \sqrt{x^2 - v^2x^2}\, dx = 0$$

$$xvdx + x^2dv - xvdx - x\sqrt{1 - v^2}\, dx = 0$$

$$x^2dv - x\sqrt{1 - v^2}\, dx = 0$$

$$xdv - \sqrt{1 - v^2}\, dx = 0$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{dx}{x} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \int \frac{dx}{x} = C$$

$$arcsen\, v - \ln x = \ln C$$

$$arcsen\, v = \ln Cx$$

Pero $v = y / x$

$$arcsen\frac{y}{x} = \ln Cx$$

es la solución general.

(6) Resolver la ecuación

$$(y^2 - xy - x^2)dx + x^2dy = 0$$

Demostración.
Sustituyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$(v^2x^2 - vx^2 - x^2)dx + x^2(vdx + xdv) = 0$$

$$x^2v^2dx - x^2v\,dx - x^2dx + x^2vdx + x^3dv = 0$$

$$x^2v^2dx - x^2dx + x^3dv = 0$$

$$(v^2 - 1)x^2dx + x^3dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v^2 - 1} = 0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{v^2 - 1} = C$$

La segunda integral la resolveremos por el método de integración de funciones racionales

$$\frac{1}{v^2 - 1} = \frac{A}{v+1} + \frac{B}{v-1} = \frac{A(v-1) + B(v+1)}{(v+1)(v-1)}$$

$$1 = Av - A + Bv + B$$

$$1 = v(A + B) - A + B$$

$$A + B = 0 \quad --(1)$$

$$-A + B = 1 \quad --(2)$$

De (1) tenemos $A=-B$. Sustituimos en (2)

$$-(-B)+B=1 \quad \therefore \quad 2B=1 \quad \therefore \quad B=\frac{1}{2}$$

por lo tanto $A=-\frac{1}{2}$

en consecuencia

$$\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v-1}=C_1$$

$$\ln x-\frac{1}{2}\ln(v+1)+\frac{1}{2}\ln(v-1)=C_1$$

$$\ln x+\frac{1}{2}\ln\frac{v-1}{v+1}=C_1$$

Pero $y=\frac{v}{x}$

$$\ln x+\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}=C_1$$

$$\ln x+\frac{1}{2}\ln\frac{y-x}{y+x}=C_1$$

$$\ln x^2(\frac{y-x}{y+x})=\ln C$$

$$x^2(\frac{y-x}{y+x})=C$$

$$x^2(y-x)=C(y+x)$$

HOMOGÉNEAS.

(7) Resolver la ecuación

$$2xy\,dx-(x^2-y^2)\,dy=0$$

Demostración.

Sustituyendo $y=vx$, $dy=vdx+xdv$ obtenemos

$$2x(vx)dx-(x^2-v^2x^2)(vdx+xdv)=0$$

$$2x^2vdx-x^2vdx-x^3dv+x^2v^3dx+x^3v^2dv=0$$

$$x^2vdx+x^2v^3dx-x^3dv+x^3v^2dv=0$$

$$(v+v^3)x^2dx+(v^2-1)dv=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{v^2-1}{v(1+v^2)}dv=0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{v^2-1}{v(1+v^2)}dv=C$$

La segunda integral la resolveremos por el método de integración de funciones racionales

$$\frac{v^2-1}{v(1+v^2)}=\frac{A}{v}+\frac{Bv+C}{1+v^2}=\frac{A(1+v^2)+(Bv+C)}{v(1+v^2)}$$

$$v^2-1=A+Av^2+Bv^2+Cv=v^2(A+B)+Cv+A$$

de donde

$$A+B=1 \qquad C=0 \qquad A=-1 \quad \therefore \quad B=2$$

en consecuencia

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dv}{v}+\int\frac{2v\,dv}{1+v^2}=C_1$$
$$\ln x-\ln v+\ln(v^2+1)=\ln C$$
$$\ln x+\ln(v^2+1)=\ln C+\ln v$$
$$\ln x(v^2+1)=\ln Cv$$
$$x(v^2+1)=Cv$$

Pero $v=\dfrac{y}{x}$

$$x(\frac{y^2}{x^2}+1)=C(\frac{y}{x})$$
$$x(\frac{y^2+x^2}{x^2})=C(\frac{y}{x})$$
$$x^2+y^2=Cx$$

(8) Resolver la ecuación

$$dy=(\frac{y}{x}-\csc^2\frac{y}{x})dx$$

Demostración.
Sustituyendo $y=vx$, $dy=vdx+xdv$ obtenemos

$$vdx+xdv=(v-\csc^2 v)dx$$
$$vdx+xdv=vdx-\csc^2 vdx$$

$$xdv = -\csc^2 v\,dx$$

$$\frac{dv}{\csc^2 v} = -\frac{dx}{x}$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int sen^2 dv = -\int \frac{dx}{x} + C_1$$

$$\frac{v}{2} - \frac{1}{4} sen 2v + \ln x = C_1$$

Pero $v = \dfrac{y}{x}$

$$\frac{y}{2x} - \frac{1}{4} sen \frac{2y}{x} + \ln x = C_1$$

$$2y - x\,sen\frac{2y}{x} + 4x\ln x = Cx$$

(9) Resolver la ecuación

$$(x+y)dy - ydx = 0$$

y hallar la solución particular en (0 , 3).

Demostración.

Sustituyendo $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ obtenemos

$$(x+vx)(vdx + xdv) - vxdx = 0$$

$$xvdx + x^2dv + xv^2dx + x^2dv - vxdx = 0$$

$$xv^2dx + (1+v)x^2dv = 0$$

$$v^2dx + (1+v)x\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+v}{v^2}dv=0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{1+v}{v^2}dv=C$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int v^{-2}dv+\int\frac{dv}{v}=C$$

$$\ln x-\frac{1}{v}+\ln v=C$$

Pero $v=\dfrac{y}{x}$

$$\ln x-\frac{x}{y}+\ln\frac{y}{x}=C$$

$$\ln x-\frac{x}{y}+\ln y-\ln x=C$$

$$\ln y-\frac{x}{y}=C$$

$$y\ln y-x=Cy$$

Si $y=3$ cuando $x=0$, entonces

$$3\ln 3-0=3C \qquad \therefore \qquad C=0$$

en consecuencia

$$y\ln y=x$$

es la solución particular deseada.

HOMOGÉNEAS.

(10) Resolver la ecuación

$$(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$$

y hallar la solución particular en (2 , 0).

Demostración.
Sustituyendo $x=vy$, $dx=vdy+ydv$ obtenemos

$$(vy+y)(vdy+ydv)+(vy-y)dy=0$$

$$yv^2dy+y^2vdv+yvdy+y^2dv+yvdy-ydy=0$$

$$v^2dy+yvdv+vdy+ydv+vdy-dy=0$$

$$v^2dy+2vdy-dy+yvdv+ydv=0$$

$$(v^2+2v-1)dy+(v+1)ydv=0$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{v+1}{v^2+2v-1}dv=0$$

Hemos separado las variables. Integramos

$$\int\frac{v+1}{v^2+2v-1}dv+\int\frac{dy}{y}=C$$

$$u=v^2+2v-1$$

$$du=(2v+2)dv=2(v+1)dv$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2(v+1)dv}{v^2+2v-1}+\int\frac{dy}{y}=C$$

$$\frac{1}{2}\ln(v^2+2v-1)+\ln y=C_1$$

$$\ln(v^2+2v-1)+2\ln y=C$$

$$\ln(v^2+2v-1)+\ln y^2=\ln C$$

$$\ln y^2(v^2+2v-1)=\ln C$$

$$y^2(v^2+2v-1)=C$$

Pero $v=\dfrac{x}{y}$

$$y^2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{2x}{y}-1\right)=C$$

$$y^2\left(\frac{x^2+2xy-y^2}{y^2}\right)=C$$

$$x^2+2xy-y^2=C$$

Si $y=0$ cuando $x=2$, entonces

$$(2)^2+(2)(2)(0)=C$$
$$C=4$$

en consecuencia

$$x^2+2xy-y^2=4$$

es la solución particular deseada.

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS.

La ecuación diferencial

$$\mathbf{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \qquad \mathbf{(I)}$$

se dice que es **exacta**, si existe una función F(x,y) cuya diferencial total es

$$\mathbf{dF = Mdx + Ndy}$$

En nuestro caso, (I) puede escribirse como

$$\mathbf{dF = 0}$$

y en consecuencia si integramos su solución es

$$\mathbf{F(x,y) = C}$$

Por otra parte, para denominar completamente a (I) como una ecuación diferencial exacta, debe verificarse la siguiente condición importante

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \mathbf{(II)}$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que existe una función F(x,y) tal que

$$\mathbf{dF = Mdx + Ndy} \qquad \mathbf{(1)}$$

Se conoce que una diferencial total de una función F(x,y) está dada por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \qquad \mathbf{(2)}$$

De (1) y (2) se tiene que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

en consecuencia

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Del cálculo sabemos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

por consiguiente

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Así hemos demostrado la primera parte, es decir, para que (I) se le considere como exacta, es necesario que (II) este satisfecha.

La segunda parte consiste en demostrar lo contrario, esto es, si la condición (II) se satisface, entonces (I) es una ecuación diferencial exacta. Para ello consideremos

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx \quad + \quad C(y)$$

donde la integral representa una integración con respecto a la variable **x** manteniendo a la variable **y** como constante. Por otro lado, C(y) puede ser considerada como la constante arbitraria de integración, la cual puede ser una función de y.

Ahora determinemos las derivadas parciales de F con respecto a las variables x e y, considerando que éstas deben ser iguales a M y N respectivamente, para que la ecuación diferencial (I) sea exacta.

$$(I) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial x}C(y) = M(x,y)$$

$$(II) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y}C(y)$$

Ahora tenemos que determinar C(y). Debido a que C(y) depende únicamente de y, se tiene que

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{dC}{dy}$$

por otra parte, se sabe que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

Sustituyendo en (II) las ecuaciones anteriores, obtenemos

$$\frac{dC}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

De aquí puede determinarse C(y) por integración con la consideración de que el miembro del lado derecho sea independiente de x, o simbólicamente, si

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = 0$$

diferenciando se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

lo cual es cierto cuando (II) se conserva. Hemos demostrado así la suficiencia de la condición (II).

De esta manera concluimos la demostración del teorema que dice lo siguiente:

TEOREMA.

Si M y N y sus derivadas parciales $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ son funciones continuas de x e y, entonces una condición necesaria y suficiente para que (I) sea una **ecuación diferencial exacta** es que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Al inició de este método se mencionó que si existe F(x,y) tal que

$$dF = Mdx + Ndy = 0$$

la solución puede ser obtenida por una integración

$$\int dF = 0$$

o bien

$$F(x,y) = C$$

Entonces nuestro problema se reduce a buscar F(x,y). Para ello nos ayudaremos de la siguiente regla, la cual se elaboró a partir de la demostración del teorema anterior.

REGLA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL EXACTA.

(1) Verificar si se cumple la condición de exactitud, es decir si

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

(2) Para determinar F(x,y) primero empleamos la ecuación

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx \quad + \quad C(y)$$

manteniendo y constante.

(3) Determinar $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

(4) Igualar $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ y calcular $\dfrac{dC}{dy}$.
Integrando está última ecuación, hallamos C(y).

(5) Sustituir el valor de C(y) en F(x,y), es decir, en la ecuación del paso número (2). Con esto la función F(x,y) está completamente determinada. Este resultado igualado a una constante arbitraria de integración es la solución general.

(6) En el caso de que se pida determinar una solución particular hay que hallarla a partir de la solución general.

EJEMPLOS.

(1) Demostrar que

$$2xy\,dx \quad + \quad (1+x^2)dy = 0$$

es exacta y determinar la solución general.

Demostración.

(1) $M(x,y)=2xy \qquad N(x,y)=1+x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x \qquad \therefore \qquad \text{Exacta.}$$

(2) $F(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y) \qquad y=cte.$

$$=\int 2xy\,dx+C(y)$$

$$\frac{2x^2y}{2}+C(y)=x^2y+C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^2y+C(y)\right]=x^2+\dfrac{d}{dy}C(y)$

(4) $x^2+\dfrac{d}{dy}C(y)=1+x^2$

$$\frac{dC}{dy}=1$$

$$dC=dy \qquad \therefore \qquad \int dC=\int dy$$

$$C(y)=y$$

(5) Sustituimos en (2)

$$F(x,y) = x^2y + C(y) = x^2y + y$$

La solución general es

$$x^2y + y = C$$

(2) Resolver la ecuación

$$3x(xy-2)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = 3x^2y - 6x$ $\qquad$ $N(x,y) = x^3 + 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \qquad \therefore \qquad \text{Exacta}$$

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$ $\qquad$ $y = cte.$

$$= \int (3x^2y - 6x)dx + C(y)$$

$$= \frac{3x^3y}{3} - \frac{6x^2}{2} + C(y) = x^3y - 3x^2 + C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^3y - 3x^2 + C(y)\right]$

$$= x^3 + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $x^3 + \frac{d}{dy}C(y) = x^3 + 2y$

$$\frac{dC}{dy} = 2y$$

$$dC = 2ydy \qquad \therefore \qquad \int dC = 2\int y\,dy$$

$$C(y) = 2\frac{y^2}{2} = y^2$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C (constante) para obtener la solución general.

$$x^3y - 3x^2 + y^2 = C$$

(3) Resolver la ecuación

$$e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = e^y \qquad N(x,y) = xe^y - 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int e^y dx + C(y) = xe^y + C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[xe^y + C(y)\right]$

$$= xe^y + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $xe^y + \dfrac{dC}{dy} = xe^y - 2y$

$$\frac{dC}{dy} = -2y$$

$$dC = -2y\,dy \qquad \therefore \qquad \int dC = -2\int y\,dy$$

$$C(y) = -2\frac{y^2}{2} = -y^2$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$xe^y - y^2 = C$$

(4) Resolver la ecuación

$$(2x^2 + 5xy^2)dx + (5x^2y - 2y^4)dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = 2x^2 + 5xy^2 \qquad N(x,y) = 5x^2y - 2y^4$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 10xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 10xy$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int (2x^2 + 5xy^2)dx + C(y)$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2y^2}{2} + C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{5x^2y^2}{2} + C(y)\right] = 5x^2y + \dfrac{d}{dy}C(y)$

(4) $5x^2y + \dfrac{dC}{dy} = 5x^2y - 2y^4$

$$\frac{dC}{dy} = -2y^4$$

$$dC = -2y^4 dy \qquad \therefore \qquad \int dC = -2\int y^4 dy$$

$$C(y) = -\ \frac{2y^5}{5}$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C_1 para obtener la solución general

$$\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2y^2}{2} - \frac{2y^5}{5} = C_1$$

$$20x^3 + 75x^2y^2 - 12y^5 = C$$

(5) Resolver la ecuación

$$\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = \sec^2 x \tan y \qquad N(x,y) = \sec^2 y \tan x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 x \sec^2 y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \sec^2 x \sec^2 y$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int \sec^2 x \tan y + C(y)$$
$$= \tan x \tan y + C(y)$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\tan x \tan y + C(y)]$$
$$= \tan x \sec^2 y + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $$\tan x \sec^2 y + \frac{dC}{dy} = \tan x \sec^2 y$$
$$\frac{dC}{dy} = 0 \quad \therefore \quad dC = 0 \quad \therefore \quad C(y) = 0$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$\tan x \tan y = C$$

(6) Resolver la ecuación

$$(y^2 - 2xy + 6x)dx + (-x^2 + 2xy - 2)dy = 0$$

Demostración.

EXACTAS.

(1) $M(x,y) = y^2 - 2xy + 6x \quad N(x,y) = -x^2 + 2xy - 2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y - 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial y} = 2y - 2x$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int (y^2 - 2xy + 6x)\,dx + C(y)$$

$$= xy^2 - \frac{2x^2y}{2} + \frac{6x^2}{2} + C(y)$$

$$= xy^2 - x^2y + 3x^2 + C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[xy^2 - x^2y + 3x^2 + C(y)\right]$

$$= 2xy - x^2 + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $2xy - x^2 + \dfrac{dC}{dy} = -x^2 + 2xy - 2$

$$\frac{dC}{dy} = -2 \quad \therefore \quad dC = -2dy \quad \therefore \quad \int dC = -2\int dy$$

$$C(y) = -2y$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$xy^2 - x^2y + 3x^2 - 2y = C$$

(7) Resolver la ecuación

$$(x + y\cos x)dx + senx\,dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = x + y\cos x$ $\quad$ $N(x,y) = senx$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \cos x$ $\quad$ $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \cos x$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int (x + y\cos x)dx + C(y)$$

$$= \frac{x^2}{2} + ysenx + C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{x^2}{2} + ysenx + C(y)\right] = senx + \dfrac{d}{dy}C(y)$

(4) $senx + \dfrac{dC}{dy} = senx$

$$\frac{dC}{dy} = 0 \qquad \therefore \qquad dC = 0 \qquad \therefore \qquad C(y) = 0$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C_1 para obtener la solución general

$$\frac{x^2}{2} + ysenx = C_1$$

$$x^2 + 2ysenx = C$$

(8) Resolver la ecuación

$$(1 + e^{2y})dx + 2xe^{2y}\,dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = 1 + e^{2y}$ $\qquad N(x,y) = 2xe^{2y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y}$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte$

$$= \int (1 + e^{2y})dx + C(y)$$

$$= x + xe^{2y} + C(y)$$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x + xe^{2y} + C(y)\right] = 2xe^{2y} + \frac{d}{dy}C(y)$

(4) $2xe^{2y} + \frac{dC}{dy} = 2xe^{2y}$

$\frac{dC}{dy} = 0 \qquad \therefore \qquad dC = 0 \qquad \therefore \qquad C(y) = 0$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$x + xe^{2y} = x(1 + e^{2y}) = C$$

(9) Resolver la ecuación

$$(x^2 - x + y^2)dx + (-ye^y + 2xy)dy = 0$$

Demostración.

(1) $M = x^2 - x + y^2 \qquad N = -ye^y + 2xy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int (x^2 - x + y^2)dx + C(y)$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy^2 + C(y)$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + xy^2 + C(y)\right]$$

$$= 2xy + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $$2xy + \frac{dC}{dy} = -ye^y + 2xy$$

$$\frac{dC}{dy} = -ye^y$$

$$dC = -ye^y dy \qquad \therefore \qquad \int dC = -\int ye^y dy$$

Empleamos el método de integración por partes

$$u = y \qquad dv = e^y dy$$

$$du = dy \qquad v = e^y$$

$$= ye^y - \int e^y dy = ye^y - e^y = e^y(y-1)$$

por lo tanto

$$C(y) = -e^y(y-1) = e^y(1-y)$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C_1 para obtener la solución general

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+xy^2+e^y(1-y)=C_1$$

$$2x^3-3x^2+6xy^2+6e^y(1-y)=C$$

(10) Resolver la ecuación

$$(x\cos^2 y - seny)dx + x\cos y(-xseny-1)dy=0$$

Demostración.

(1) $M(x,y)=x\cos^2 y - seny$

$$N(x,y)=x\cos y(-xseny-1)$$
$$=-x^2seny\cos y - x\cos y$$

$$\frac{\partial M}{\partial N}=x[2\cos y(-seny)]-\cos y$$
$$=-2xseny\cos y-\cos y$$
$$=\cos y(-2xseny-1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-2xseny\cos y-\cos y$$
$$=\cos y(-2xseny-1)$$

puesto que son iguales es exacta

(2) $$F(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y) \qquad y=cte.$$
$$=\int (x\cos^2 y - seny)dx + C(y)$$
$$=\frac{x^2\cos^2 y}{2} - xseny + C(y)$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2\cos^2 y}{2} - xseny + C(y)\right]$$
$$=\frac{x^2}{2}2\cos y(-seny) - x\cos y + \frac{d}{dy}C(y)$$
$$=-x^2 seny\cos y - x\cos y + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4)

$$-x^2 seny\cos y - x\cos y + \frac{dC}{dy} = -x^2 seny\cos y - x\cos y$$

$$\frac{dC}{dy}=0$$

$$dC=0$$

$$C(y)=0$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C_1 para obtener la solución general

$$\frac{x^2\cos^2 y}{2} - x\,seny = C_1$$

$$x^2\cos^2 y - 2x\,seny = C$$

(11) Resolver la ecuación

$$(4x^3y^3 + \frac{1}{x})dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})dy = 0$$

Demostración.

(1) $M(x,y) = 4x^3y^3 + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $N(x,y) = 3x^4y^2 - \dfrac{1}{y}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 12x^3y^2$$

puesto que

$$\frac{\partial M}{\partial N} = \frac{\partial N}{\partial x} = 12x^3y^2 \qquad \therefore \qquad \text{Es exacta.}$$

(2) $f(x,y)=\int M(x,y)dy+C(y) \qquad y=cte.$

$$=\int(4x^3y^3+\frac{1}{x})dx+C(y)$$

$$=x^4y^3+\ln x+C(y)$$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[x^4y^3+\ln x+C(y)\right]$

$$=3x^4y^2+\frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $3x^4y^2+\frac{dC}{dy}=3x^4y^2-\frac{1}{y}$

$$\frac{dC}{dy}=-\frac{1}{y}$$

$$dC=-\frac{1}{y}dy$$

$$\int dC=-\int\frac{dy}{y}$$

$$C(y)=-\ln y$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$x^4y^3+\ln x-\ln y=x^4y^3+\ln\frac{x}{y}=C$$

(12) Resolver la ecuación

$$\frac{2xy-1}{y}dx+\frac{x+3y}{y^2}dy=0$$

y determinar la solución particular si $y=1$ cuando $x=2$.

Demostración.

(1) $$M(x,y)=\frac{2xy-1}{y}=2x-\frac{1}{y}$$

$$N(x,y)=\frac{x+3y}{y^2}=\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{y^2} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+C(y) \qquad y=cte.$$

$$=\int(2x-\frac{1}{y})\,dx+C(y)$$

$$=\frac{2x^2}{2}-\frac{x}{y}+C(y)$$

$$=x^2-\frac{x}{y}+C(y)$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - \frac{x}{y} + C(y) \right]$$

$$= \frac{x}{y^2} + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $$\frac{x}{y^2} + \frac{dC}{dy} = \frac{x}{y^2} + \frac{3}{y}$$

$$\frac{dC}{dy} = \frac{3}{y}$$

$$dC = \frac{3}{y}dy$$

$$\int dC = \int \frac{3}{y}dy$$

$$C(y) = 3\ln y$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$x^2 - \frac{x}{y} + 3\ln y = C$$

$$x^2y - x + 3y\ln y = Cy$$

Si $y=1$ cuando $x=2$, se tiene que

$$(2)^2(1) - 2 + 0 = C(1) \qquad \therefore \qquad C = 2$$

En consecuencia

$$x^2y - x + 3y\ln y = 2y$$

$$x^2y - x - 2y + 3y\ln y = 0$$

es la solución particular.

(13) Resolver la ecuación

$$(4x - 2y + 3)dx + (5y - 2x + 7)dy = 0$$

y determinar la solución particular en (1 , 2).
Demostración.

(1) $M(x,y) = 4x - 2y + 3$

$N(x,y) = 5y - 2x + 7$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) \qquad y = cte.$

$$= \int (4x - 2y + 3)dx + C(y)$$

$$= \frac{4x^2}{2} - 2xy + 3x + C(y)$$

$$= 2x^2 - 2xy + 3x + C(y)$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[2x^2 - 2xy + 3x + C(y)\right]$$

$$= -2x + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $$-2x + \frac{dC}{dy} = 5y - 2x + 7$$

$$\frac{dC}{dy} = 5y + 7$$

$$dC = (5y + 7)\,dy$$

$$\int dC = \int (5y + 7)dy$$

$$C(y) = \frac{5y^2}{2} + 7y$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C_1 para obtener la solución general

$$2x^2 - 2xy + 3x + \frac{5y^2}{2} + 7y = C_1$$

$$4x^2 - 4xy + 6x + 5y^2 + 14y = C$$

Si $y = 2$ cuando $x = 1$, se tiene que

$$4 - 4(1)(2) + 6 + 5(2)^2 + 14(2) = C \quad \therefore \quad C = 50$$

en consecuencia

$$4x^2+5y^2-4xy+6x+14y-50=0$$

es la solución particular.

(14) Resolver la ecuación

$$(2xseny+2x+3y\cos x)dx+(x^2\cos y+3senx)dy=0$$

y determinar la solución particular si $y=0$ cuando $x=\frac{\pi}{2}$.

Demostración.

(1) $M(x,y)=2xseny+2x+3y\cos x$

$N(x,y)=x^2\cos y+3senx$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x\cos y+3\cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2x\cos y+3\cos x$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y) \qquad y=cte.$

$$=\int(2xseny+2x+3y\cos x)dx+C(y)$$

$$=\frac{2x^2seny}{2}+\frac{2x^2}{2}+3ysenx+C(y)$$

$$= x^2 seny + x^2 + 3ysenx + C(y)$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 seny + x^2 + 3ysenx + C(y)\right]$$

$$= x^2 \cos y + 3senx + \frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $$x^2 \cos y + 3senx + \frac{dC}{dy} = x^2 \cos y + 3senx$$

$$\frac{dC}{dy} = 0 \quad \therefore \quad dC = 0 \quad \therefore \quad C(y) = 0$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C para obtener la solución general

$$x^2 seny + x^2 + 3ysenx = C$$

Si $y = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$, se tiene que

$$(\frac{\pi}{2})^2(0) + (\frac{\pi}{2})^2 + 0 = C \quad \therefore \quad C = \frac{\pi^2}{4}$$

en consecuencia

$$x^2 seny + x^2 + 3ysenx = \frac{\pi^2}{4}$$

es la solución particular.

(15) Resolver la ecuación

$$(ye^{2x}-3xe^{2y})dx+(\frac{1}{2}e^{2x}-3x^2e^{2y}-e^y)dy=0$$

y determinar la solución particular en (1 , 0).

Demostración.

(1) $M(x,y)=ye^{2x}-3xe^{2y}$

$$N(x,y)=\frac{1}{2}e^{2x}-3x^2e^{2y}-e^y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{2x}-6xe^{2y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=e^{2x}-6xe^{2y}$$

puesto que son iguales es exacta.

(2) $F(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y) \qquad y=cte.$

$$=\int(ye^{2x}-3xe^{2y})dx+C(y)$$

$$=\frac{ye^{2x}}{2}-\frac{3x^2e^{2y}}{2}+C(y)$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{1}{2}ye^{2x}-\dfrac{3}{2}x^2e^{2y}+C(y)\right]$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-3x^2e^{2y}+\frac{d}{dy}C(y)$$

(4) $$\frac{1}{2}e^{2x} - 3x^2e^{2y} + \frac{dC}{dy} = \frac{1}{2}e^{2x} - 3x^2e^{2y} - e^y$$

$$\frac{dC}{dy} = -e^y$$

$$dC = -e^y\,dy$$

$$\int dC = -\int e^y dy$$

$$C(y) = -e^y$$

(5) Sustituimos en (2) e igualamos a C_1 para obtener la solución general

$$\frac{1}{2}ye^{2x} - \frac{3}{2}x^2e^{2y} - e^y = C_1$$

$$ye^{2x} - 3x^2e^{2y} - 2e^y = C$$

Si $y = 0$ cuando $x = 1$, se tiene

$$0 - 3(1) - 2(1) = C$$
$$-3 - 2 = C$$
$$-5 = C$$

en consecuencia

$$ye^{2x} - 3x^2e^{2y} - 2e^y + 5 = 0$$

que es la solución particular deseada.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.

Una ecuación diferencial lineal es una ecuación de primer grado en una de sus variables y en su derivada.

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \qquad \textbf{(I)}$$

es una **ecuación diferencial lineal en y.**

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = Q(y) \qquad \textbf{(II)}$$

es una **ecuación diferencial lineal en x.**

En este tipo de ecuaciones diferenciales, interviene un **factor de integración** que las satisface.

Cuando la ecuación diferencial lineal es de la forma (I), su factor de integración es

$$e^{\int P(x)\,dx}$$

Usaremos este factor para determinar la solución general de (I). El proceso es el siguiente: Primero multiplicamos (I) por el factor de integración

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+yP(x)e^{\int P(x)\,dx}=e^{\int P(x)\,dx}Q(x)$$

o bien

$$e^{\int P(x)\,dx}dy+yP(x)e^{\int P(x)\,dx}dx=e^{\int P(x)\,dx}Q(x)dx$$

Ahora integramos

$$\int\left[e^{\int P(x)dx}dy+yP(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+C$$

La integral indefinida o función primitiva de la integral que se ubica en el miembro izquierdo, se obtiene directamente si observamos con cuidado su contenido y a la vez recordamos la diferencial del producto de dos funciones. Por consiguiente se tiene que

$$y\,e^{\int P(x)\,dx}$$

Para comprobar que efectivamente está es la función primitiva, sólo basta con diferenciar.

Por lo tanto

$$y e^{\int P(x)\,dx} = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C$$

despejamos a y

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx + C\right]$$

con esto hemos obtenido la **solución general** de la ecuación diferencial lineal dada por (I).

Similarmente la ecuación diferencial lineal (II), tiene como factor de integración

$$e^{\int P(y)\,dy}$$

cuya **solución general** es

$$x = e^{-\int P(y)\,dy}\left[\int e^{\int P(y)\,dy} Q(y)\,dy + C\right]$$

Existe otro método para resolver una ecuación diferencial lineal. Nosotros sólo emplearemos el más conocido y es el que acabamos de describir.

Por último, se dan unos resultados importantes. Sus demostraciones pueden consultarse en un libro de cálculo.

$$e^{\ln x} = x \qquad e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(1) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

Demostración.

$$P(x) = 2x$$

$$\int P(x)dx = \int 2xdx = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{x^2}$$

La solución general es

$$y = e^{-x^2}\left[\int 4xe^{x^2}dx + C\right]$$

$$= e^{-x^2}(2e^{x^2} + C)$$

$$= 2 + Ce^{-x^2}$$

(2) Resolver la ecuación

$$y' + 4y = x^2$$

Demostración.

$$P(x) = 4$$

$$\int P(x)dx = \int 4dx = 4x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} e^{4x}$$

La solución general es

$$y = e^{-4x}\left[\int x^2 e^{4x} dx + C\right]$$

Por integración por partes

$$u = x^2 \qquad dv = e^{4x} dx$$

$$du = 2xdx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

por lo tanto

$$y = e^{-4x}\left[\frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}\int xe^{4x} dx + C\right]$$

nuevamente integración por partes

$$u = x \qquad dv = e^{4x} dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

se tiene que

$$y = e^{-4x}\left[\frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}xe^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + C_1\right]$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32} + C_1 e^{-4x}$$

$$32y = 8x^2 - 4x + 1 + Ce^{-4x}$$

(3) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$$

Demostración.

$$P(x) = 1$$

$$\int P(x)dx = \int dx = x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^x$$

La solución general es

$$y = e^{-x}\left[\int (2+2x)e^x dx + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[\int 2e^x dx + \int 2xe^x dx + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[2e^x + 2\int xe^x dx + C\right]$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$= e^{-x}\left[2e^x + 2(xe^x - \int e^x dx) + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[2e^x + 2xe^x - 2e^x + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[2xe^x + C\right]$$

$$= 2x + Ce^{-x}$$

(4) Resolver la ecuación

$$2(y-4x^2)\,dx + x\,dy = 0$$

Demostración.

$$dy + \frac{2}{x}ydx - 8xdx = 0$$

$$dy + \frac{2}{x}ydx = 8xdx$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 8x$$

por lo tanto

$$P(x) = \frac{2}{x}$$

$$\int P(x)dx = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln x = \ln x^2$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

La solución general es

$$y = x^{-2}\left[\int x^2(8x)dx + C\right]$$

$$= x^{-2}\left[\frac{8x^4}{4} + C\right]$$

$$= 2x^2 + Cx^{-2}$$

(5) Resolver la ecuación

$$y' - y = e^x$$

Demostración.

$$P(x) = -1$$

$$\int P(x) = -\int dx = -x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-x}$$

La solución general es

$$y = e^x\left[\int e^x e^{-x} dx + C\right]$$

$$= e^x(x + C)$$

(6) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + (senx)y = 2xe^{\cos x}$$

Demostración.

$$P(x) = senx$$

$$\int P(x)dx = \int senx\, dx = -\cos x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\cos x}$$

La solución general es

$$y = e^{\cos x}\left[\int e^{-\cos x} 2x \cos x\,dx + C\right]$$
$$= e^{\cos x}\left[\int 2x\,dx + C\right]$$
$$= e^{\cos x}(x^2 + C)$$

(7) Resolver la ecuación

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$$

Demostración.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$$

por lo tanto

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\int P(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

La solución general es

$$y = x\left[\int (x^2 + 3x - 2)x^{-1}dx + C\right]$$
$$= x\left[\int (x + 3 - \frac{2}{x})dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x\ln x + Cx$$

(8) Resolver la ecuación

$$x^2 dy + (y - 2xy - 2x^2)\,dx = 0$$

Demostración.

$$dy + \frac{y - 2xy - 2x^2}{x^2}dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y - 2xy}{x^2} - 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 2$$

por lo tanto

$$P(x) = \frac{1 - 2x}{x^2}$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{1 - 2x}{x^2}dx = \int x^{-2}dx - 2\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} - \ln x^2$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\frac{1}{x} - \ln x^2} = (e^{-\frac{1}{x}})(e^{-\ln x^2}) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

La solución general es

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}} \left[\int \frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx + C \right]$$

$$= x^2 e^{\frac{1}{x}} \left[2e^{-\frac{1}{x}} + C \right] = 2x^2 + Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$= x^2 (2 + Ce^{\frac{1}{x}})$$

(9) Resolver la ecuación

$$x^3 y' + (2 - 3x^2) y = x^3$$

Demostración.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2 - 3x^2}{x^3} y = 1$$

por lo tanto

$$P(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^3}$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{2 - 3x^2}{x^3} dx = 2\int x^{-3} dx - 3\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x^2} - \ln x^3$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\frac{1}{x^2} - \ln x^3} = (e^{-\frac{1}{x^2}})(e^{-\ln x^3}) = \frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}$$

La solución general es

$$y = x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left[\int \frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}} dx + C \right]$$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C \right]$$

$$= \frac{1}{2} x^3 + C x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$$

(10) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + 2y = sen 3x$$

Demostración.

$$P(x) = 2$$

$$\int P(x) dx = 2 \int dx = 2x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x) dx} = e^{2x}$$

La solución general es

$$y = e^{-2x} \left[\int e^{2x} sen 3x \, dx + C \right]$$

Después de haber usado el método de integración por partes se tiene que

$$y = e^{-2x}\left[\frac{2e^{2x}sen3x}{13} - \frac{3e^{2x}\cos 3x}{13} + C\right]$$
$$= \frac{1}{13}(2sen3x - 3\cos 3x) + Ce^{-2x}$$

(11) Resolver la ecuación

$$x\ln x\,dy + (y - \ln x)dx = 0$$

Demostración.

$$dy + \frac{y - \ln x}{x\ln x}dx = 0$$
$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\ln x} - \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$$

por lo tanto

$$P(x) = \frac{1}{x\ln x}$$
$$\int P(x)dx = \int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$$

La solución general es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\ln x}\left[\int \frac{\ln x}{x}dx + C\right] \\ &= \frac{1}{\ln x}\left[\frac{\ln^2 x}{2} + C_1\right] \\ y\ln x &= \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \\ 2y\ln x &= \ln^2 x + C \end{aligned}$$

(12) Resolver la ecuación

$$2(2xy + 4y - 3)dx + (x+2)^2 dy = 0$$

Demostración.

$$4xy + 8y - 6 + (x+2)^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4y(x+2)}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)^2}$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x+2}y=\frac{6}{(x+2)^2}$$

por lo tanto

$$P(x)=\frac{4}{x+2}$$

$$\int P(x)dx=4\int\frac{dx}{x+2}=4\ln(x+2)=\ln(x+2)^4$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx}=e^{\ln(x+2)^4}=(x+2)^4$$

La solución general es

$$y=(x+2)^{-4}\left[\int(x+2)^4\frac{6}{(x+2)^2}dx+C\right]$$
$$=\frac{1}{(x+2)^4}\left[\frac{6(x+2)^3}{3}+C\right]$$
$$=\frac{2}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^4}$$

(13) Resolver la ecuación

$$2x\,dx = (x^4 + y)\,dx$$

y determinar la solución particular en (1 , 0).
Demostración.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{x^3}{2}$$

por lo tanto

$$P(x) = -\frac{1}{2x}$$

$$\int P(x)dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\ln x = \ln x^{-\frac{1}{2}}$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

La solución general es

$$y = x^{\frac{1}{2}}\left[\int x^{-\frac{1}{2}}\frac{x^3}{2}dx + C\right]$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}\left[\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C_1\right]$$

$$= \frac{x^4}{7} + C_1 x^{\frac{1}{2}}$$

$$7y = x^4 + Cx^{\frac{1}{2}}$$

Si $y = 0$ cuando $x = 1$, se tiene que

$$7(0) = 1^4 + C\sqrt{1}$$
$$C = -1$$

por lo tanto

$$7y = x^4 - x^{\frac{1}{2}}$$

es la solución particular.

(14) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - my = C_1 e^{mx}$$

donde m y C_1 son constantes.
Demostración.

$$P(x) = -m$$
$$\int P(x)dx = -\int m\,dx = -mx$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-mx}$$

La solución general es

$$y = e^{mx}\left[\int e^{-mx} C_1 e^{mx}\, dx + C_2\right]$$
$$= e^{mx}(C_1 x + C_2)$$

(15) Resolver la ecuación

$$(1+\cos x)\frac{dy}{dx} = senx(senx + senx\cos x - y)$$

Demostración.

$$(1+\cos x)\frac{dy}{dx} = sen^2 x + sen^2 x\cos x - y\,senx$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{senx}{1+\cos x}y = \frac{sen^2 x + sen^2 x\cos x}{1+\cos x}$$
$$= \frac{sen^2 x(1+\cos x)}{1+\cos x} = sen^2 x$$

por lo tanto

$$P(x) = \frac{senx}{1+\cos x}$$

$$P(x) = \int \frac{senx}{1+\cos x}dx = \int \frac{senx}{1+\cos x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x}dx$$

$$= \int \frac{senx(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{senx(1-\cos x)}{sen^2x}\,dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{senx}\,dx = \int \csc x\,dx - \int \cot x\,dx$$

$$= \ln(\csc x - \cot x) - \ln(senx)$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(\csc x - \cot x) - \ln(senx)}$$

$$= e^{\ln(\csc x - \cot x)}\, e^{-\ln(senx)}$$

$$= (\csc x - \cot x)\frac{1}{senx}$$

$$= \left(\frac{1}{senx} - \frac{\cos x}{senx}\right)\frac{1}{senx}$$

$$= \frac{1}{sen^2x} - \frac{\cos x}{sen^2x}$$

$$= \frac{1-\cos x}{sen^2x}$$

La solución general es

$$y = \frac{sen^2x}{1-\cos x}\left[\int \frac{1-\cos x}{sen^2x}\, sen^2x\,dx + C\right]$$

$$= \frac{sen^2x}{1-\cos x}\left[\int dx - \int \cos x\,dx + C\right]$$

$$y=\frac{sen^2x}{1-\cos x}\left[x-senx+C\right]$$

Pero

$$sen^2x+\cos^2 x=1$$

$$sen^2x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$$

por lo tanto

$$y=(1+\cos x)(x-senx+C)$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI.

La ecuación de Bernoulli es de la forma

$$\frac{dy}{dx}+yP(x)=y^nQ(x) \qquad \text{(I)}$$

o bien

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{-n+1}P(x)=Q(x) \qquad \text{(II)}$$

Esta ecuación puede convertirse en una ecuación diferencial lineal, si consideramos la transformación

$$v=y^{-n+1}$$

en consecuencia

$$\frac{d}{dx}(v)=\frac{d}{dx}(y^{-n+1})$$

Derivamos implícitamente

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx} \qquad \textbf{(III)}$$

Sustituyendo en (II), se obtiene

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + vP(x) = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + v(1-n)P(x) = (1-n)Q(x)$$

EJEMPLOS.

(1) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = y^5$$

Demostración.
Dividimos entre y^5

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y^{-4} = 1$$

En este caso $v = y^{-4}$

Según (III)

$$\frac{1}{1-5}\frac{dv}{dx} = y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} = y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

Sustituimos

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 1$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{12}{x}v = -4$$

Ahora es lineal en v

$$P(x) = \frac{12}{x}$$

$$\int P(x)dx = 12\int\frac{dx}{x} = 12\ln x = \ln x^{12}$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x^{12}} = x^{12}$$

La solución general es

$$v = x^{-12}\left[\int x^{12}(-4)\,dx + C_1\right]$$

$$= -4x^{-12}\left[\frac{x^{13}}{13} + C_1\right]$$

$$v = -\frac{4x}{13} + Cx^{-12}$$

Pero $v = y^{-4} = \dfrac{1}{y^4}$

por lo tanto

$$\frac{1}{y^4} = -\frac{4x}{13} + Cx^{-12}$$

(2) Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^3}$$

Demostración.

Dividimos entre y^3

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^3}$$

En este caso

$$v = y^{-2}$$

Según (III)

$$\frac{1}{1-3}\frac{dv}{dx} = y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}=y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

Sustituimos

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=\frac{1}{x^3}$$

o bien

$$\frac{dv}{dx}-\frac{4}{x}v=-\frac{2}{x^3}$$

Ahora es lineal en v

$$P(x)=-\frac{4}{x}$$

$$\int P(x)dx=-4\int\frac{dx}{x}=-4\ln x=-\ln x^4$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx}=e^{-\ln x^4}=\frac{1}{x^4}=x^{-4}$$

La solución general es

$$v=x^4\left[\int x^{-4}(-\frac{2}{x^3})dx+C\right]$$
$$=x^4\left[-2\int x^{-7}dx+C\right]$$

$$v = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

Pero $v = y^{-2} = \dfrac{1}{y^2}$

por lo tanto

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + Cx^4$$

(3) Resolver la ecuación

$$y' - y = xy^5$$

Demostración.

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5$$

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x$$

En este caso $v = y^{-4}$

Según (III)

$$\frac{1}{1-5}\frac{dv}{dx} = y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} = y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

Sustituimos

$$-\frac{1}{4}\frac{dv}{dx} - v = x$$

$$\frac{dv}{dx} + 4v = -4x$$

Ahora es lineal en v.

$$P(x) = 4$$
$$\int P(x)dx = 4\int dx = 4x$$

El factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = e^{4x}$$

La solución general es

$$v = e^{-4x}\left[\int e^{4x}(-4x)dx + C\right]$$
$$= -4e^{-4x}\left[\int xe^{4x}\,dx + C\right]$$

Por el método de integración por partes

$$u = x \qquad dv = e^{4x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx$$
$$= \frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$$

Volvemos a la solución general

$$v = -4e^{-4x}\left[\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + C\right]$$
$$= -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

Pero $v = y^{-4} = \dfrac{1}{y^4}$

por lo tanto

$$\frac{1}{y^4} = \frac{1}{4} - x + Ce^{-4x}$$

$$\frac{y^4}{4} - xy^4 + Cy^4e^{-4x} = 1$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR.

En esta parte del curso, analizaremos varios métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que 1.

En la página 1 establecimos que la ecuación diferencial lineal de orden n se representa como

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

De esta forma podemos considerar varios tipos.

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL CON COEFICIENTES CONSTANTES.

(1) $y' + 3y = 5$

(2) $y'' + 9y = 2x + 3$

(3) $3y''' + 6y = 2e^x$

(4) $y''' + 8y' = \operatorname{sen} x$

(5) $y^{(V)} + 4y''' - 2y'' + 3y' - y = x^3 e^x$

Si $f(x) = 0$ recibe el nombre de **ecuación diferencial homogénea.** Si $f(x) \neq 0$ entonces se trata de una **ecuación diferencial no homogénea.**

(1) $y' + 5y = 0$

(2) $x^3 y''' - 3y' = 0$

(3) $3xy''' + 2xy' + 5y = 0$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

(1) $y'' - 16y = 0$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(3) $12y''' - 5y' - 2y = 0$

(4) $y^{(V)} - y = 0$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

(1) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}$

(2) $4y''' - y' = 4e^{-x} + \cos x$

(3) $y''' - 3y'' + 3y' - 2y = 48x^3e^{2x}$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL CON COEFICIENTES VARIABLES.

(1) $y'' - xy = 0$ Homogénea.

(2) $x^2y'' - 2xy' - 8y = 0$ Homogénea.

(3) $x^3y^{(IV)} + 9xy' + 6y = 0$ Homogénea.

(4) $xy'' + y' = x$ No homogénea.

(5) $x^3y''' - 8y' = \ln x$ No homogénea.

(6) $3x^2y'''' + 13y = x^4e^{x}$ No homogénea.

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Si hallamos dos soluciones linealmente independientes, obtendremos la solución general formando simplemente una combinación lineal de ambas.

A la ecuación diferencial anterior, se le asocia una ecuación algebraica que recibe el nombre de **ecuación auxiliar o ecuación característica** la cual es

$$am^2 + bm + c = 0$$

TIPO I. Las raíces de la ecuación auxiliar son reales y distintas

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

es solución general de la ecuación diferencial.

TIPO II. Las raíces de la ecuación auxiliar son reales e iguales

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x}$$

es solución general de la ecuación diferencial.

E.D.L.H. CON COEF. CONSTANTES.

TIPO III. Las raíces de la ecuación auxiliar son complejas y conjugadas

$$y = e^{ax}(C_1 \operatorname{sen} bx + C_2 \cos bx)$$

es solución general de la ecuación diferencial.

EJEMPLOS.

(1) Resolver la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^2 - 5m + 6 = 0$

$$(m-2)(m-3) = 0 \qquad \therefore \qquad m_1 = 2 \ , \ m_2 = 3$$

Las raíces son reales y distintas.

La solución general es : $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

(2) Resolver la ecuación diferencial

$$4y'' - 12y' + 5y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $4m^2 - 12m + 5 = 0$

$$(m - \frac{1}{2})(m - \frac{5}{2}) = 0 \quad \therefore \quad m_1 = \frac{1}{2} \ , \ m_2 = \frac{5}{2}$$

La solución general es :

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{5}{2}x}$$

(3) Resolver la ecuación

$$2y''' - 5y'' - y' + 6y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $2m^3 - 5m^2 - m + 6 = 0$

Aplicamos división sintética. El término constante es 6 y es divisible por $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ y -6.

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & -1 & 6 & -1 \\ & -2 & 7 & -6 & \\ \hline 2 & -7 & 6 & 0 & \end{array}$$

La ecuación reducida es $2m^2 - 7m + 6 = 0$ de donde

$$m_2 = 2 \quad , \quad m_3 = \frac{3}{2}$$

La solución general es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{\frac{3}{2}x}$$

(4) Resolver la ecuación

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^3 - 3m^2 - m + 3 = 0$

Aplicamos división sintética. El término constante es 3 y es divisible por $1, -1, 3$ y -3.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & -1 & 3 & \underline{1} \\ & 1 & -2 & -3 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 & \end{array}$$

$\therefore \quad (m-1)(m^2-2m-3)=(m-1)(m+1)(m-3)=0$

de donde

$$m_1=1 \qquad m_2=-1 \qquad m_3=3$$

La solución general es

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}$$

(5) Resolver la ecuación

$$4y''''-8y'''-7y''+11y'+6y=0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $4m^4-8m^3-7m^2+11m+6=0$

Aplicamos división sintética. El término constante es 6 y es divisible por $1,-1,2,-2,3,-3,6$ y -6.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & -8 & -7 & 11 & 6 & \underline{-1} \\ & -4 & 12 & -5 & -6 & \\ \hline 4 & -12 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

en consecuencia

$$(m+1)(4m^3-12m^2+5m+6)=0$$

Aplicamos nuevamente división sintética.

4	-12	5	6	2
	8	-8	-6	
4	-4	-3	0	

$\therefore \quad (m+1)(m-2)(4m^2-4m-3)=0$

por fórmula general

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16+38}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{8}=\frac{4\pm 8}{8}$$

$$m_3=\frac{4+8}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \qquad m_4=\frac{4-8}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad m_1=-1 \quad m_2=2 \quad m_3=\frac{3}{2} \quad m_4=-\frac{1}{2}$$

La solución general es

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-\frac{1}{2}x}+C_4e^{\frac{3}{2}x}$$

(6) Resolver la ecuación diferencial

$$y''-6y'+9y=0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $\quad m^2-6m+9=0$

de donde $\quad (m-3)(m-3)=(m-3)^2=0$

Raíces reales e iguales $\quad m_1=3$ y $m_2=3$

La solución general es

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$$

(7) Resolver la ecuación

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^3 - 5m^2 + 7m - 3 = 0$

Aplicamos división sintética. El término constante es divisible por $1, -1, 3$ y -3.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -5 & 7 & -3 & 1 \\ & 1 & -4 & 3 & \\ \hline 1 & -4 & 3 & 0 & \end{array}$$

$\therefore \quad (m-1)(m^2 - 4m + 3) = (m-1)(m-1)(m-3) = 0$

$\therefore \quad m_1 = 1 \qquad m_2 = 1 \qquad m_3 = 3$

La solución general es

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{3x}$$

(8) Resolver la ecuación

$$4y''' + 4y'' + y' = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $4m^3 + 4m^2 + m = 0$

$$\therefore \quad m^3 + m^2 + \frac{m}{4} = m(m^2 + m + \frac{1}{4})$$

$$= m(m + \frac{1}{2})(m + \frac{1}{2}) = 0$$

$$m_1 = 0 \qquad m_2 = -\frac{1}{2} \qquad m_3 = -\frac{1}{2}$$

La solución general es

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{2}} + C_3 x e^{-\frac{1}{2}}$$

(9) Resolver la ecuación

$$y'''' + 2y''' + y'' = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^4 + 2m^3 + m^2 = 0$

$\therefore \qquad m^2(m^2 + 2m + 1) = m^2(m+1)(m+1) = 0$

$\therefore \quad m_1 = 0 \qquad m_2 = 0 \qquad m_3 = -1 \qquad m_4 = -1$

La solución general es

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

(10) Resolver la ecuación

$$y'''' - 2y''' - 7y'' + 20y' - 12y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^4 - 2m^3 - 7m^2 + 20m - 12 = 0$

Aplicamos división sintética. El término constante es divisible por 1, - 1, 2, - 2, 3, - 3, 4, - 4, 6, - 6, 12, - 12.

1	-2	-7	20	-12	1
	1	-1	-8	12	
1	-1	-8	12	0	

$$\therefore \quad (m-1)(m^3-m^2-8m+12)=0$$

Nuevamente división sintética

1	-1	-8	12	-3
	-3	+12	-12	
1	-4	4	0	

$$\therefore \quad (m-1)(m+3)(m^2-4m+4)=0$$

$$(m-1)(m+3)(m-2)(m-2)=0$$

$$m_1=1 \quad m_2=-3 \quad m_3=2 \quad m_4=2$$

La solución general es

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4xe^{2x}$$

(11) Resolver la ecuación

$$y''+y=0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^2+1=0$

$$\therefore \quad m^2=-1 \qquad m=\pm\sqrt{-1} \qquad m=\pm i$$

Raíces complejas y conjugadas.

Para este ejemplo : $a = 0$ y $b = 1$

La solución general es

$$y = e^{0x}(C_1 senx + C_2 \cos x)$$
$$y = C_1 senx + C_2 \cos x$$

(12) Resolver la ecuación

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^2 - 4m + 13 = 0$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

Para este ejemplo : $a = 2$ y $b = 3$

La solución general es

$$y = e^{2x}(C_1 sen3x + C_2 \cos 3x)$$

(13) Resolver la ecuación

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^3 - 3m^2 + 9m + 13 = 0$

Aplicamos división sintética. El término constante es divisible por $1, -1, 13$ y -13.

1	-3	9	13	-1
	-1	4	-13	
1	-4	13	0	

$$\therefore \quad (m+1)(m^2-4m+13)=0$$

Las raíces de la ecuación de segundo grado las calculamos en el ejemplo anterior.

La solución general es

$$y=C_1e^{-x}+e^{2x}(C_2sen3x+C_3\cos 3x)$$

(14) Resolver la ecuación

$$y'''-3y''+7y'-5y=0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^3-3m^2+7m-5=0$

Aplicamos división sintética. El término constante es divisible por $1,-1,5$ y -5.

1	-3	7	-5	1
	1	-2	5	
1	-2	5	0	

$$\therefore \quad (m-1)(m^2-2m+5)=0$$

Ahora calculamos las otras dos raíces.

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$m_2 = 1 + 2i \qquad m_3 = 1 - 2i$$

Para este ejemplo : $a = 1$ y $b = 2$

La solución general es

$$y = C_1 e^x + e^x (C_2 sen 2x + C_3 \cos 2x)$$

(15) Resolver la ecuación

$$y'''' + 8y'' + 16y = 0$$

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^4 + 8m^2 + 16 = 0$

$$\therefore \quad (m^2 + 4)(m^2 + 4) = 0$$

Las raíces son

$$m_1 = 2i \qquad m_2 = -2i \qquad m_3 = 2i \qquad m_4 = -2i$$

Para este ejemplo : $a = 0$ y $b = 2$

La solución general es

$$y = (C_1 + C_2 x) sen 2x + (C_3 + C_4 x) \cos 2x$$

(16) Resolver la ecuación

$$y'' - 4y' + 29 = 0$$

y determinar la solución particular en $x = 0$, $y = 0$ y $y' = 5$.

Demostración.

Ecuación auxiliar : $m^2 - 4m + 29 = 0$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-116}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-100}}{2} = \frac{4 \pm 10i}{2} = 2 \pm 5i$$

$$m_1 = 2 + 5i \qquad m_2 = 2 - 5i$$

Para este ejemplo : $a = 2$ y $b = 5$

La solución general es

$$y = C_1 e^{2x} sen5x + C_2 e^{2x} \cos 5x$$

Solución particular.

Se tiene $y = 0$ para $x = 0$

$\therefore \quad 0 = 0 + C_2$ de donde $C_2 = 0$

por otro lado

$$y' = C_1 e^{2x} 5\cos 5x + 2C_1 e^{2x} sen5x -$$
$$- 5C_2 e^{2x} sen5x + 2C_2 e^{2x} \cos 5x$$

tenemos que $y' = 5$ para $x = 0$

$\therefore \quad 5 = 5C_1 + 2C_2$ pero $C_2 = 0$

$\therefore \quad 5C_1 = 5$ de donde $C_1 = 1$

la solución particular deseada es

$$y = e^{2x} sen5x$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

A partir de estos temas, desarrollaremos dos métodos que permiten calcular la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes.

La solución general es

$$y = y_c + y_p$$

donde y_c es la **función complementaria** la cual es la solución general que se obtiene de la ecuación diferencial homogénea, esto es, si f(x) = 0 y y_p es una **solución particular** de la no homogénea.

Conocida la solución y_c por los métodos ya descritos, el problema se reduce a determinar la solución particular y_p.

Los métodos para determinar la solución particular son: **Coeficientes Indeterminados y Variación de Parámetros.**

En el volumen II de Ecuaciones Diferenciales, ampliamos estos temas al tratar **Operadores Diferenciales y Transformada de Laplace.**

COEFICIENTES INDETERMINADOS.

El **método de variación de parámetros**, también conocido como método general, supone el cambio de las constantes C_1 y C_2 de la solución y_c por funciones de x. El **método de coeficientes indeterminados** es más sencillo y se emplea para ciertos tipos de la función f(x). Esencialmente se usa para tres formas de f(x):

f(x) --------- polinomio.
f(x) --------- exponencial.
f(x) --------- función trigonométrica.
f(x) --------- combinaciones de las tres indicadas.

El método consiste en crear una solución particular similar a los términos de f(x). Ya teniendo identificado esto, cada término de dicha solución particular debe estar acompañado por un **coeficiente indeterminado** los cuales representaremos por letras mayúsculas A, B, C,..., etc. El siguiente paso es derivar esta solución particular tantas veces como sea el orden de la ecuación diferencial dada y el resultado de cada derivada sustituirlo en ella. Lo anterior nos conduce a obtener una identidad en la variable independiente en la cual podemos igualar los coeficientes de cada término y con ello formar un sistema de ecuaciones lineales. La resolución de este sistema nos permite conocer los valores de los coeficientes indeterminados.

COEFICIENTES INDETERMINADOS.

FORMA DE $f(x)$	RAICES DE LA ECUACION AUXILIAR.	FORMA DE y_p PARA $k = \text{máx}(m,n)$
$P_m(x)$	$m_i \neq 0$, $i=1,..,z$	$p_m(x)$
	alguna $m_i = 0$	$x^z p_m(x)$

FORMA DE $f(x)$	RAICES DE LA ECUACION AUXILIAR.	FORMA DE y_p PARA $k = \text{máx}(m,n)$
$P_m(x)e^{ax}$	a no es raíz	$P_m(x)e^{ax}$
	a es raíz repetida z veces (de orden z)	$x^z p_m(x)e^{ax}$

FORMA DE $f(x)$: $P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\,\text{sen}bx$	
RAICES DE LA ECUACION AUXILIAR	FORMA DE y_p PARA $k = \text{máx}(m,n)$
$\pm$ ib no son raíces	$p_k(x)\cos bx + q_k(x)\,\text{sen}bx$
$\pm$ ib son raíces de orden z	$x^z[p_k(x)\cos bx + q_k(x)\,\text{sen}bx]$

FORMA DE $f(x)$: $e^{ax}[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\,\text{sen}bx]$	
RAICES DE LA ECUACION AUXILIAR.	FORMA DE y_p PARA $k = \text{máx}(m,n)$
a $\pm$ ib no son raíces	$e^{ax}[p_k(x)\cos bx+q_k(x)\,\text{sen}bx]$
a $\pm$ ib son raíces de orden z	$x^z e^{ax}[p_k(x)\cos bx + q_k(x)\,\text{sen}bx]$

COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Para la resolución de ecuaciones diferenciales, nos auxiliaremos de las tablas de la página anterior. La primer tabla se aplica cuando tenemos que f(x) tiene la forma de una constante o un polinomio que depende de x. Hay que tomar muy en cuenta que tipo de raíces se obtienen de la solución complementaria, para construir la solución particular.

EJEMPLOS.

(1) Resolver

$$y'' - y = 8$$

Demostración.

En este caso f(x) tiene la forma de una constante. En cada caso primero hay que obtener la solución general de la homogénea (función complementaria).

$m^2 - 1 = 0 \qquad (m+1)(m-1) = 0 \qquad m_1 = -1\,, m_2 = 1$

Tenemos dos raíces diferentes, por consiguiente

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$$

La solución particular toma la forma de una constante.

$$y_p = A \qquad y' = 0 \qquad y'' = 0$$

Sustituimos estos valores en la ecuación diferencial

$y'' - y = 0 - A = 8 \qquad \therefore \quad A = -8 \qquad \therefore \quad y_p = -8$

la solución general es

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - 8$$

COEFICIENTES INDETERMINADOS.

(2) Resolver

$$y''' - 4y'' = 5$$

Demostración.

$$m^3 - 4m^2 = 0 \qquad m^2(m-4) = 0$$

$$m_1 = 0 \qquad m_2 = 0 \qquad m_3 = 4$$

La solución general de la función complementaria es

$$y_c = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}$$

En este ejemplo tenemos 2 raíces cero, por lo tanto se tiene que z = 2. Considerando esto, la solución particular se construye de la siguiente manera

$$y_p = Ax^2 \qquad y' = 2Ax \qquad y'' = 2A \qquad y''' = 0$$

Sustituimos estos valores en la ecuación diferencial

$$y''' - 4y'' = 0 - 4(2A) = 5 \therefore A = -\frac{5}{8} \quad \therefore y_p = -\frac{5}{8}x^2$$

la solución general es

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} - \frac{5}{8}x^2$$

(3) Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$$

Demostración.

En este caso f(x) tiene la forma de un polinomio. Primero obtenemos la solución general de la función complementaria

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \qquad (m+2)^2 = 0$$

$$m_1 = -2 \qquad m_2 = -2$$

por lo tanto

$$y_c = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

se propone como solución particular

$$y_p = Ax + B \qquad y' = A \qquad y'' = 0$$

Sustituimos estos valores en la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0 + 4A + 4(Ax + B) = 2x + 6$$

$$4A + 4Ax + 4B = 2x + 6$$

$$4Ax + 4A + 4B = 2x + 6$$

Igualando coeficientes

$$4A = 2$$

$$4A + 4B = 6$$

de donde

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = 1$$

por consiguiente

$$y_p = \frac{1}{2}x + 1$$

la solución general es

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$$

(4) Resolver

$$y''' + y'' = 8x^2$$

Demostración.

$m^3 + m^2 = 0 \qquad m^2(m+1) = 0$

$m_1 = 0 \qquad m_2 = 0 \qquad m_3 = -1$

por lo tanto

$y_c = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$

En este caso z = 2. Se propone como solución particular

$y_p = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

$y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$

$y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$

$y''' = 24Ax + 6B$

Sustituyendo

$$24\text{Ax} + 6\text{B} + 12\text{Ax}^2 + 6Bx + 2C = 8x^2$$

$$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C = 8x^2$$

Igualando coeficientes

$$12A = 8$$

$$24A + 6B = 0$$

$$6B + 2C = 0$$

de donde

$$A = \frac{2}{3} \qquad B = -\frac{8}{3} \qquad C = 8$$

por consiguiente:

$$y_p = \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$$

La solución general es

$$y = C_1 + C_2 x + C_3\, e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2$$

(5) Resolver

$$y'' - 6y' + 9y = e^x$$

Demostración.

En este tipo de ejemplos es importante considerar el coeficiente que acompaña a la función exponencial, en este caso se tiene k = 1. Si en las raíces de la ecuación auxiliar aparecen estos coeficientes, hay que tomarlos en cuenta en el momento de construir la solución particular.

$m^2 - 6m + 9 = 0 \qquad (m-3)^2 = 0$

$m_1 = 3 \qquad m_2 = 3$

por lo tanto

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Se propone como solución particular

$y_p = Ae^x \qquad y' = Ae^x \qquad y'' = Ae^x$

Sustituyendo

$$Ae^x - 6Ae^x + 9Ae^x = e^x$$

$4Ae^x = e^x \quad \therefore \quad A = \dfrac{1}{4} \quad \therefore \quad y_p = \dfrac{1}{4}e^x$

la solución general es

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$$

COEFICIENTES INDETERMINADOS.

(6) Resolver

$$y'' - 3y' - 4y = 30e^{4x}$$

Demostración.

$m^2 - 3m - 4 = 0 \qquad (m+1)(m-4) = 0$

$m_1 = -1 \qquad m_2 = 4$

por lo tanto

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

En este ejemplo k = 4 y $m_2 = 4$, entonces

$y_p = Axe^{4x}$

$y' = A(4xe^{4x} + e^{4x}) = 4Axe^{4x} + Ae^{4x}$

$y'' = A(16xe^{4x} + 4e^{4x} + 4e^{4x}) = 16Axe^{4x} + 8Ae^{4x}$

Sustituyendo

$16Axe^{4x} + 8Ae^{4x} - 12Axe^{4x} - 3Ae^{4x} - 4Axe^{4x} = 30e^{4x}$

$$5Ae^{4x} = 30e^{4x}$$

$$5A = 30 \qquad \therefore \qquad A = 6$$

entonces

$$y_p = 6xe^{4x}$$

la solución general es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + 6xe^{4x}$$

(7) Determinar y_p de

$$y'' + 4y = 12 \text{ sen}2x$$

Demostración.

En este tipo de ejemplos nos fijamos en el coeficiente de la función trigonométrica para construir la solución particular. En este caso m = 2.

$m^2 + 4 = 0 \qquad m_1 = 2i \qquad m_2 = -2i$

donde a = 0 y b = 2

Como m = b = 2, entonces

$y_p = x(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$

$y' = x(-2A\operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) + (A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$

$y'' = x(-4A\cos 2x - 4B\operatorname{sen} 2x) - 4A\operatorname{sen} 2x - 4B\cos 2x$

Sustituyendo

$-4Ax\cos 2x - 4Bx\operatorname{sen} 2x - 4A\operatorname{sen} 2x + 4B\cos 2x +$

$+4Ax\cos 2x + 4Bx\operatorname{sen} 2x = 12\operatorname{sen} 2x$

$$-4A\operatorname{sen} 2x + 4B\cos 2x = 12\operatorname{sen} 2x$$

Igualando coeficientes

$$-4A = 12$$

$$A = -\frac{12}{4} = -3$$

$$B = 0$$

en consecuencia

$$y_p = -3x\cos 2x$$

VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

La siguiente regla será usada para resolver ecuaciones diferenciales de la forma

$$a y'' + b y' + c y = g(x)$$

donde a, b y c son constantes.
Si $a = 1$ aplicamos la regla de inmediato. Si $a \neq 1$ primero dividimos todo entre a para obtener

$$y'' + P y' + Q y = f(x)$$

Hecho esto aplicamos la regla.

REGLA.

1.- Determinar la función complementaria

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

2.- Calcular el determinante (**Wronskiano**).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

3.- Hallar u'_1 y u'_2 mediante

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} \qquad u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

4.- Obtener u_1 y u_2 usando integración.

5.- **La solución particular** es: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.

VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

1.- Resolver

$$y'' - 4y' + 3y = 1$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \qquad \therefore \qquad (m-1)(m-3) = 0$$

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 3$$

$$\therefore \qquad y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^x \qquad y_2 = e^{3x}$$

$$y'_1 = e^x \qquad y'_2 = 3e^{3x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{4x} - e^{4x} = 2e^{4x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{e^{3x}}{2e^{4x}} = -\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{e^x}{2e^{4x}} = \frac{1}{2}e^{-3x}$$

(4)

$$u_1 = -\frac{1}{2}\int e^{-x}dx = \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int e^{-3x}dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{3})\int e^{-3x}(-3)dx = -\frac{1}{6}e^{-3x}$$

(5) La solución particular es

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{2} e^{-x} e^{x} - \frac{1}{6} e^{-3x} e^{3x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}$$

2.- Resolver

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \quad \therefore \quad (m-2)(m-3) = 0$$

$$m_1 = 2 \qquad m_2 = 3$$

$$\therefore \quad y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = e^{3x}$$

$$y'_1 = 2e^{2x} \qquad y'_2 = 3e^{3x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{e^{3x}4e^{2x}}{e^{5x}} = -\frac{4e^{5x}}{e^{5x}} = -4$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{e^{2x}4e^{2x}}{e^{5x}} = \frac{4e^{4x}}{e^{5x}} = 4e^{-x}$$

(4)

$$u_1 = -4\int dx = -4x$$

$$u_2 = 4\int e^{-x}dx = -4e^{-x}$$

(5) La solución particular es

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = -4x(e^{2x}) - 4e^{-x}e^{3x} = -4xe^{2x} - 4e^{2x}$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - 4xe^{2x} - 4e^{2x}$$
$$= (c_1 - 4)e^{2x} + c_2e^{3x} - 4xe^{2x} = c_0e^{2x} + c_2e^{3x} - 4xe^{2x}$$

3.- Resolver

$$y'' + y = \tan x$$

Demostración.

VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2+1=0 \quad \therefore \quad m=\pm\sqrt{-1} \quad \therefore \quad m=\pm i$$

$$\therefore \qquad y_c=c_1 senx+c_2\cos x=c_1y_1+c_2y_2$$

(2) Se tiene que

$$y_1=senx \qquad y_2=\cos x$$
$$y'_1=\cos x \qquad y'_2=-senx$$

por lo tanto

$$W=\begin{vmatrix} senx & \cos x \\ \cos x & -senx \end{vmatrix}=-sen^2x-\cos^2 x$$

$$=-\left(sen^2x+\cos^2 x\right)=-1$$

(3)

$$u'_1=-\frac{y_2f(x)}{W}=-\frac{\cos x\tan x}{-1}=\cos x\tan x$$

$$u'_2=\frac{y_1f(x)}{W}=\frac{senx\tan x}{-1}=-senx\tan x$$

(4)

$$u_1=\int\cos x\tan x\,dx=\int\cos x\frac{senx}{\cos x}\,dx=\int senx\,dx=-\cos x$$

$$u_2=-\int senx\tan x\,dx=-\int\frac{sen^2x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{\cos^2 x-1}{\cos x}\,dx$$

$$= \int (\cos x - \sec x)\, dx = senx - \ln(\sec x + \tan x)$$

(5) La solución particular es

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= -\cos x\, senx + (senx - \ln(\sec x + \tan x))\cos x \\ &= -\cos x senx + \cos x senx - \cos x \ln(\sec x + \tan x) \\ &= -\cos x \ln(\sec x + \tan x) \end{aligned}$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 senx + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

4.- Resolver

$$y'' - 2y' + y = xe^x \cos x$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \therefore \quad (m-1)^2 = 0$$

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 1$$

$$\therefore \quad y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^x \qquad y_2 = xe^x$$

$$y'_1 = e^x \qquad y'_2 = xe^x + e^x$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = xe^{2x} + e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{xe^x(xe^x \cos x)}{e^{2x}} = -x^2 \cos x$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{e^x(xe^x \cos x)}{e^{2x}} = x \cos x$$

(4)

$$u_1 = -\int x^2 \cos x \, dx = -x^2 senx - 2x\cos x + 2senx$$

$$u_2 = \int x \cos x \, dx = xsenx + \cos x$$

En ambas integrales se uso el método de integración por partes.

(5) La solución particular es

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = e^x(-x^2 senx - 2x\cos x + 2senx) +$$
$$+ xe^x(xsenx + \cos x)$$
$$= -x^2 e^x senx - 2xe^x \cos x + 2e^x senx + x^2 e^x senx$$
$$+ xe^x \cos x = 2e^x senx - xe^x \cos x$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 xe^x + 2e^x senx - xe^x \cos x$$

5.- Resolver

$$y'' - y = 8$$

Demostración.
Ecuación auxiliar.

(1) $m^2 - 1 = 0 \qquad (m-1)(m+1) = 0$

$$m_1 = -1 \qquad m_2 = 1$$

$\therefore \qquad y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^{-x} \qquad y_2 = e^{x}$$

$$y'_1 = -e^{-x} \qquad y'_2 = e^{x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x} \\ -e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{e^{x}(8)}{2} = -4e^{x}$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{e^{-x}(8)}{2} = 4e^{-x}$$

(4)

$$u_1 = -4\int e^{x} dx = -4e^{x}$$

$$u_2 = 4\int e^{-x} dx = -4e^{-x}$$

(5) **La solución particular** es

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (-4e^{x})e^{-x} + (-4e^{-x})e^{x}$$
$$= -4 - 4 = -8$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - 8$$

6.- Resolver

$$y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \qquad (m+2)^2 = 0$$
$$m_1 = -2 \qquad m_2 = -2$$
$$\therefore \qquad y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^{-2x} \qquad y_2 = x e^{-2x}$$
$$y'_1 = -2e^{-2x}$$
$$y'_2 = x(-2e^{-2x}) + e^{-2x}(1) = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x} + e^{-2x} \end{vmatrix} =$$
$$= -2xe^{-4x} + e^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{xe^{-2x}(2x+6)}{e^{-4x}} = -\frac{2x^2e^{-2x}+6xe^{-2x}}{e^{-4x}} =$$

$$= -2x^2e^{2x} - 6xe^{2x}$$

$$u'_2 = \frac{e^{-2x}(2x+6)}{e^{-4x}} = \frac{2xe^{-2x}+6e^{-2x}}{e^{-4x}} =$$

$$= 2xe^{2x} + 6e^{2x}$$

(4)

$$-2\int x^2e^{2x}dx$$

$$u = x^2 \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = 2xdx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x} - 2\frac{1}{2}\int xe^{2x}dx\right) = -x^2e^{2x} + 2\int xe^{2x}dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= -x^2e^{2x} + 2\left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)$$

$$= -x^2e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$-6\int xe^{2x}dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= -6(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx) = -6(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}) =$$

$$= -3xe^{2x} + \frac{3}{2}e^{2x}$$

por lo tanto

$$u_1 = -x^2e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} - 3xe^{2x} + \frac{3}{2}e^{2x}$$

$$= -x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x}$$

$$u_2 = 2\int xe^{2x}dx + 6\int e^{2x}dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= 2(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx) + 6(\frac{1}{2})e^{2x}$$

$$= xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{6}{2}e^{2x} = xe^{2x} + \frac{5}{2}e^{2x}$$

(5)

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$= (-x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x})e^{-2x} + (xe^{2x} + \frac{5}{2}e^{2x})xe^{-2x}$$

$$= -x^2 - 2x + 1 + x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}x + 1$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$$

7.- Resolver

$$y'' - 6y' + 9y = e^x$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \qquad (m-3)^2 = 0$$

$$m_1 = 3 \qquad m_2 = 3$$

$$\therefore \qquad y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^{3x} \qquad y_2 = xe^{3x}$$

$$y'_1 = 3e^{3x} \qquad y'_2 = 3xe^{3x} + e^{3x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & 3xe^{3x} + e^{3x} \end{vmatrix} = 3xe^{6x} + e^{6x} - 3xe^{6x} = e^{6x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{xe^{3x}e^x}{e^{6x}} = -\frac{xe^{4x}}{e^{6x}} = -xe^{-2x}$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{e^{3x}e^x}{e^{6x}} = \frac{e^{4x}}{e^{6x}} = e^{-2x}$$

(4)

$$u_1 = -\int x e^{-2x} dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{-2x} dx$$

$$du = dx \quad . \quad v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$= -(-\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$u_2 = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

(5)

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$= (\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x})e^{3x} + (-\frac{1}{2}e^{-2x})(xe^{3x})$$

$$= \frac{x}{2}e^{x} + \frac{1}{4}e^{x} - \frac{x}{2}e^{x} = \frac{1}{4}e^{x}$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{1}{4}e^{x}$$

8.- Resolver

$$y'' - 3y' - 4y = 30e^{4x}$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 3m - 4 = 0 \qquad (m+1)(m-4) = 0$$

$$m_1 = -1 \qquad m_2 = 4$$

$$\therefore \quad y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^{-x} \qquad y_2 = e^{4x}$$

$$y'_1 = -e^{-x} \qquad y'_2 = 4e^{4x}$$

por lo tanto

$$W=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{4x} \\ -e^{-x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{3x}+e^{3x}=5e^{3x}$$

(3)

$$u'_1=-\frac{y_2 f(x)}{W}=-\frac{e^{4x}30e^{4x}}{5e^{3x}}=-\frac{30e^{8x}}{5e^{3x}}=-6e^{5x}$$

$$u'_2=\frac{y_1 f(x)}{W}=\frac{e^{-x}30e^{4x}}{5e^{3x}}=\frac{30e^{3x}}{5e^{3x}}=6$$

(4)

$$u_1=-6\int e^{5x}dx=-\frac{6}{5}e^{5x}$$

$$u_2=6\int dx=6x$$

(5)

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1+u_2y_2 \\ &= -\frac{6}{5}e^{5x}(e^{-x})+6x(e^{4x}) \\ &= -\frac{6}{5}e^{4x}+6xe^{4x} \end{aligned}$$

La solución general es

$$y=y_c+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}+6xe^{4x}-\frac{6}{5}e^{4x}$$

$$=c_1e^{-x}+(c_2-\frac{6}{5})e^{4x}+6xe^{4x}=c_1e^{-x}+c_3e^{4x}+6xe^{4x}$$

9.- Resolver

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \qquad (m-2)^2 = 0$$

$$m_1 = 2 \qquad m_2 = 2$$

$$\therefore \quad y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x\, e^{2x}$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = x\, e^{2x}$$

$$y'_1 = 2e^{2x} \qquad y'_2 = x(2e^{2x}) + e^{2x} = 2xe^{2x} + e^{2x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = -\frac{x^2e^{4x} + xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x$$

$$u'_2 = \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{xe^{4x} + e^{4x}}{e^{4x}} = x+1$$

(4)

$$u_1 = \int(-x^2 - x)\,dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$u_2 = \int(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x$$

(5)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})e^{2x} + (\frac{x^2}{2} + x)xe^{2x}$$

$$= -\frac{x^3}{3}e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{2}e^{2x} + x^2e^{2x}$$

$$= \frac{x^3}{6}e^{2x} + \frac{x^2}{2}e^{2x} = (\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^{2x}$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + (\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2})e^{2x}$$

10.- Resolver

$$y'' + y = \cos x$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 + 1 = 0 \qquad m^2 = \pm\sqrt{-1} \qquad m = \pm i$$

$$m_1 = i \qquad m_2 = -i \qquad a = 0 \qquad b = 1$$

$$\therefore \quad y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \operatorname{sen} x$$

$$y'_1 = -\operatorname{sen} x \qquad y'_2 = \cos x$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1} = -\operatorname{sen} x \cos x$$

$$u'_2 = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{\cos x \cos x}{1} = \cos^2 x$$

(4)

$$u_1 = -\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$u_2 = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$$

(5)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\cos x + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x)\operatorname{sen} x$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}(2\operatorname{sen} x \cos x)\operatorname{sen} x$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{2} = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$$

11.- Resolver

$$4y'' + 36y = \csc 3x$$

Demostración.
Dividimos cada término entre 4

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x$$

(1) Ecuación auxiliar.

$$m^2 + 9 = 0 \qquad m^2 = -9 \qquad m = \pm\sqrt{-9} = \pm\, 3i$$

$$m_1 = 3i \qquad m_2 = -3i \qquad a = 0 \qquad b = 3$$

$$\therefore \quad y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = \cos 3x \qquad y_2 = \operatorname{sen} 3x$$

$$y'_1 = -3\operatorname{sen} 3x \qquad y'_2 = 3\cos 3x$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3\operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\operatorname{sen}^2 3x = 3$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{\operatorname{sen} 3x \frac{1}{4}\csc 3x}{3} = -\frac{\frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x(\frac{1}{\operatorname{sen} 3x})}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$u'_2 = \frac{\cos 3x \frac{1}{4} \csc 3x}{3} = \frac{\cos 3x}{12 \operatorname{sen} 3x}$$

(4)

$$u_1 = -\frac{1}{12}\int dx = -\frac{1}{12}x$$

$$u_2 = \frac{1}{12}\int \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}\,dx = \frac{1}{36}\int \frac{3\cos 3x\,dx}{\operatorname{sen} 3x} =$$

$$= \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|$$

(5)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|\operatorname{sen} 3x$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}\operatorname{sen} 3x\ln|\operatorname{sen} 3x|$$

12.- Resolver

$$y'' + y = \sec^2 x$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2+1=0 \qquad m^2=-1 \qquad m=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

$$m_1=i \qquad m_2=-i \qquad a=0 \qquad b=1$$

$$\therefore \quad y_c=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x$$

(2) Se tiene que

$$y_1=\cos x \qquad y_2=\operatorname{sen} x$$

$$y'_1=-\operatorname{sen} x \qquad y'_2=\cos x$$

por lo tanto

$$W=\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen} x\\ -\operatorname{sen} x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$$

(3)

$$u'_1=-\frac{\operatorname{sen} x\sec^2 x}{1}=-\operatorname{sen} x\sec^2 x$$

$$u'_2=\frac{\cos x\sec^2 x}{1}=\cos x\sec^2 x$$

(4)

$$u_1=-\int\operatorname{sen} x\ \sec^2 x\,dx=-\int\operatorname{sen} x\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\int\cos^{-2}x\operatorname{sen} x\,dx=\frac{\cos^{-1}x}{-1}=-\frac{1}{\cos x}=-\sec x$$

$$u_2=\int\cos x\sec^2 x\,dx=\int\cos x\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos x}$$

$$=\int\sec x\,dx=\ln(\sec x+\tan x)$$

(5)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$
$$= (-\sec x)\cos x + \ln(\sec x + \tan x)\,\text{sen}\, x$$
$$= -\sec x \frac{1}{\sec x} + \text{sen}\, x \ln(\sec x + \tan x)$$
$$= \text{sen}\, x \ln(\sec x + \tan x) - 1$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p =$$
$$= c_1 \cos x + c_2\,\text{sen}\, x + \text{sen}\, x \ln(\sec x + \tan x) - 1$$

13.- Resolver

$$y'' - 3y' + 2y = e^x\,\text{sen}\, x$$

Demostración.

(1) Ecuación auxiliar

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \qquad (m-1)(m-2) = 0$$
$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 2$$
$$\therefore \quad y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

(2) Se tiene que

$$y_1 = e^x \qquad y_2 = e^{2x}$$
$$y'_1 = e^x \qquad y'_2 = 2e^{2x}$$

por lo tanto

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} \\ e^{x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

(3)

$$u'_1 = -\frac{e^{2x}e^{x}\operatorname{sen} x}{e^{3x}} = -\frac{e^{3x}\operatorname{sen} x}{e^{3x}} = -\operatorname{sen} x$$

$$u'_2 = \frac{e^{x}e^{x}\operatorname{sen} x}{e^{3x}} = \frac{e^{2x}\operatorname{sen} x}{e^{3x}} = e^{-x}\operatorname{sen} x$$

(4)

$$u_1 = -\int \operatorname{sen} x\, dx = \cos x$$

$$u_2 = \int e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

(5)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= \cos x(e^{x}) - \frac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)e^{2x}$$

$$= e^{x}\cos x - \frac{1}{2}e^{x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

La solución general es

$y = y_c + y_p =$

$$= c_1e^{x} + c_2e^{2x} + e^{x}\cos x - \frac{1}{2}e^{x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}e^{x}\cos x$$

$$= c_1e^{x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{x}\cos x - \frac{1}{2}e^{x}\operatorname{sen} x$$

$$= c_1e^{x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{x}(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

El método de **variación de parámetros** también se emplea para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas conocidas como **Ecuaciónes de Cauchy – Euler.** Las de segundo orden son de la forma

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=g(x)$$

61885 23 860050 6

OBRAS DEL MISMO AUTOR

1.- RESOLUCIÓN TOTAL DE ÁLGEBRA.
2.- RESOLUCIÓN TOTAL DE TRIGONOMETRÍA.
3.- LO FUNDAMENTAL EN ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA.
4.- RESOLUCIÓN TOTAL DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.
5.- RESOLUCIÓN TOTAL DE 333 EJERCICIOS. (GUÍA DE MATEMÁTICAS).
6.- RESOLUCIÓN TOTAL DE FUNCIONES.
7.- RESOLUCIÓN TOTAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.
8.- RESOLUCIÓN INTEGRA DE DERIVADAS E INTEGRALES.
9.- MÉTODOS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN.
10.- PROBLEMAS RESUELTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL.
11.- RESOLUCIÓN TOTAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES. VOL. I.
12.- RESOLUCIÓN TOTAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES. VOL. II.
13.- PROBLEMAS RESUELTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.
14.- ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES.
15.- ECUACIONES DIFERENCIALES ESP. DE LA FÍSICA MATEMÁTICA.
16.- RESOLUCIÓN TOTAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. VOL. I.
17.- RESOLUCIÓN TOTAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA. VOL. II.
18.- PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD.
19.- PROBLEMAS RESUELTOS DE ESTADÍSTICA.
20.- RESOLUCIÓN TOTAL DE ÁLGEBRA LINEAL.
21.- RESOLUCIÓN TOTAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
22.- MÉTODOS NUMÉRICOS. VOL. I.
23.- MÉTODOS NUMÉRICOS. VOL. II.
24.- RESOLUCIÓN TOTAL DE ANÁLISIS VECTORIAL.
25.- PROBLEMAS RESUELTOS DE ANÁLISIS VECTORIAL.
26.- CÁLCUL [illegible] VARIAS VARIABLES.
27.- FUNCIO [illegible] RIAS VARIABLES.
28.- FUND [illegible] ÁLISIS TENSORIAL.
29.- RES [illegible] DE MÉTODOS MATEMÁTICOS. VOL. I.
30.- RESO [illegible] DE MÉTODOS MATEMÁTICOS. VOL. II.
31.- SERIES DE [illegible] R Y PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE.
32.- RESOLUCIÓN [illegible] AL DE VARIABLE COMPLEJA.
33.- FUNCIÓN GAMMA.
34.- MATEMÁTICAS PARA FÍSICOS E INGENIEROS.
35.- RESOLUCIÓN TOTAL DE MATEMÁTICAS DISCRETAS.
36.- INSTRUMENTOS DE UN LABORATORIO DE QUÍMICA.
37.- TEORÍA DE LA RELATIVIDAD. VOL. I.
38.- TEORÍA DE LA RELATIVIDAD. VOL. II.
39.- DICCIONARIO MATEMÁTICO. (INGLÉS - ESPAÑO [illegible]
40.- DICCIONARIO DE FÍSICA (INGLÉS – ESPAÑOL).
41.- LA EDUCACIÓN EN CONTRA DE LOS PROBLEMAS [illegible] ALES.
42.- LAS 10 MALDICIONES.
43.- CANCIÓN, POESÍA, VERSO.
44.- SOBRE LAS ALAS DEL ALMA.
45.- HISTORIA DE MIS LIBROS.
46.- ESENCIAS Y EXPERIENCIAS FÍSICO – MATEMÁTICAS.
47.- HISTORIA Y MATEMÁTICAS.
48.- ESENCIA EXCELSA MI MADRE JOSEFA.
49.- HOMBRE SIN NOMBRE.
50.- MIS CANCIONES A MI TIERRA MEXICANA.
51.- BREVIARIO MULTICOLOR.
52.- MIS ADVERSIDADES COMO ESCRITOR Y EDITOR.